2009 年研究生入学考试数学三试题及分析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（1）函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为

（A） 1　　（B） 2　（C） 3　　（D）无穷多个　　[　　]

【分析】本题考查可去间断点.先找出使 $f\left(x\right)$ 无定义的点，然后根据可去间断点的定义判断.

【详解】首先找出使 $f\left(x\right)$ 无定义点：满足 $\sin \pi x=0$ 的点，即 $x=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$.

上述点若为可去间断点，则 $f\left(x\right)$ 在该点的左右极限存在且相等，又 $\sin \pi x=0$，必有分子 $x-x^3=0$，即可去间断点可能为 $x=0,\pm1$.

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}=\dfrac{1}{\pi},\lim\limits_{x\to0^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x-x^3}{\sin \pi x}=\dfrac{1}{\pi}$；

$$\lim_{x\to1^-}f\left(x\right)=\lim_{x\to1^-}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{x\to1^+}f\left(x\right)=\lim_{x\to1^+}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\frac{2}{\pi};$$

$$\lim_{x\to-1^-}f\left(x\right)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim_{x\to-1^-}\frac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{x\to-1^+}f\left(x\right)=\lim_{x\to-1^+}\frac{x-x^3}{\sin \pi x}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim_{x\to-1^+}\frac{1-3x^2}{\pi\cos \pi x}=\frac{2}{\pi}.$$

所以 $\lim\limits_{x\to0^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to0^+}f\left(x\right),\lim\limits_{x\to1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1^+}f\left(x\right),\lim\limits_{x\to-1^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-1^+}f\left(x\right)$.

综上可知可去间断点有 3 个，故选（C）.

【评注】本题为基础题型. 设 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的间断点，若 $f_-(x_0)=f_+(x_0)\neq f(x_0)$，则 $x=x_0$ 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 1 讲【例 4】【例 5】；2009 版《数学复习指南》（经济类）第 1 篇第 1 章【例 1.39】，精选习题一第 3 小题（4）；文登冲刺§1

【例 10】;《考研数学精题 660》（1.28，1.31）.

（2）当 $x \to 0$ 时，$f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 为等价无穷小，则

（A）　$a = 1, b = -\dfrac{1}{6}$　　　　（B）$a = 1, b = \dfrac{1}{6}$

（C）$a = -1, b = -\dfrac{1}{6}$　　　　（D）$a = -1, b = \dfrac{1}{6}$　　　　[　　]

【分析】本题考查等价无穷小. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$，求参数 a, b 的值. 由于 “$\dfrac{0}{0}$ 型未定式的极限值等于分子、分母的最低阶无穷小项之比的极限”，则利用等价无穷小和皮亚诺型余项的泰勒公式推导即可.

【详解】当 $x \to 0$ 时，$f(x) = x - \sin ax = x - \left(ax - \dfrac{1}{3!}(ax)^3 + o(x^3)\right)$

$$= (1-a)x + \frac{1}{3!}(ax)^3 - o(x^3).$$

$$g(x) = x^2 \ln(1-bx) \sim -bx^3.$$

因为 $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 为等价无穷小，

所以 $1 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-a)x + \frac{1}{3!}(ax)^3 - o(x^3)}{-bx^3} \Rightarrow 1-a = 0, b = -\dfrac{1}{3!}$.

故 $a = 1, b = -\dfrac{1}{6}$，即选（A）.

【评注】本题为基础题型，也可利用洛必达法则计算.

由题设可知 $1 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \sin ax}{-bx^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1 - a\cos ax}{-3bx^2}$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}\left(-3bx^2\right) = 0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}(1 - a\cos ax) = 0 \Rightarrow a = 1$.

故原极限 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{-3bx^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{-3bx^2} \Rightarrow b = -\dfrac{1}{6}$.

本题实质为极限中的常数的确定，类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 1 讲【例 16】；2009 版《数学复习指南》（经济类）第 1 篇第 1 章【例 1.36】，精选习题一第 2 小题（7）（8）；文登冲刺题 §1【例 1】;《考研数学精题 660》（1.11，1.20）.

（3）使不等式 $\displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t > \ln x$ 成立的 x 的范围是

(A) $\left(0,1\right)$　(B) $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$　(C) $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$　(D) $\left(\pi,+\infty\right)$　[　　]

【分析】 $\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t > \ln x$ 可转化为 $\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\sin t - 1}{t}\mathrm{d}t = \int_x^1 \frac{1-\sin t}{t}\mathrm{d}t > 0$，然后利用定积分的比较定理的推论（见评注）进行判断.

【详解】 $\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t > \ln x$ 等价于

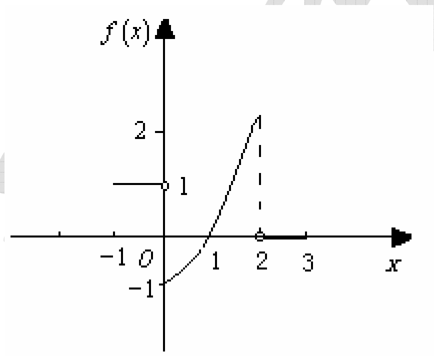
$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t - \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\sin t - 1}{t}\mathrm{d}t = \int_x^1 \frac{1-\sin t}{t}\mathrm{d}t > 0.$$

因为在上述四个区间内，$\dfrac{1-\sin t}{t} > 0$，所以要使上式成立，须 $0 < x < 1$，故选 (A).

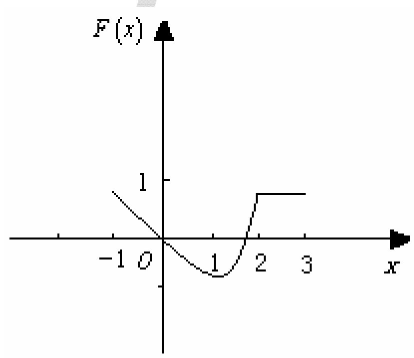
【评注】定积分比较定理的推论 若 $f(x) \geq 0$，对任意的 $x \in [a,b]\left(b > a\right)$，有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geq 0$.

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 5 讲§5【例 1】,《数学复习指南》（经济类）第 1 篇第 3 章【例 3.62】;《考研数学精题 660》（1.166）.

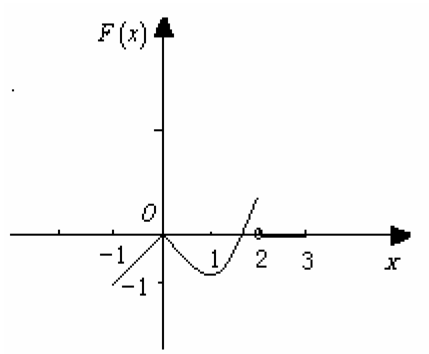
(4) 设函数 $y = f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-1,3\right]$ 上的图形为



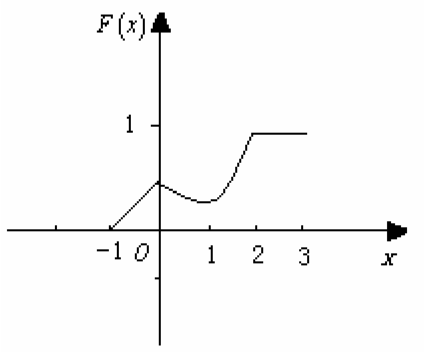
则 $F\left(x\right) = \int_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$ 的图形为



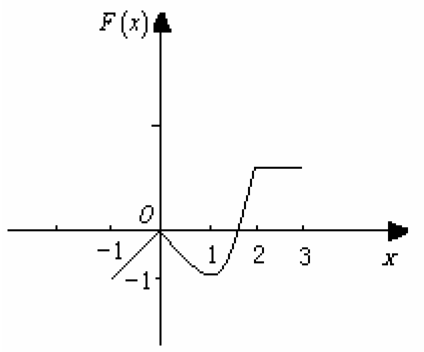
(A)



(B)



（C）



（D）

[　　]

【分析】本题考查函数 $y=f(x)$ 与 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 图形的关系. 可利用函数的单调增减性判断.

【详解】由图可知，

（1）在区间 $(-1,0)$， $f(x)\geq 0$，则 $F(x)$ 在此区间单调递增，排除（A）.

（2） $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 表示 $y=f(x), x=0, x=x$ 与 x 轴所围曲边梯形位于 x 轴上方的图形面积减去位于 x 轴下方的图形面积所得差值，当 $0<x<1$ 时，由图可知 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<0$，排除（C）.

（3）又当 $2<x<3$ 时， $f(x)=0$，因此 $\lim\limits_{x\to 2^-}F(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=F(2)$，$\lim\limits_{x\to 2^+}F(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t+\lim\limits_{x\to 2^+}\int_2^x f(t)\mathrm{d}t=F(2)$，所以 $F(x)$ 在 $x=2$ 连续，排除（B），故选（D）.

【评注】本题为一新题型，综合考查了原函数的性质、定积分的几何意义、函数的单调增减性和函数的连续性..

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 6 讲【例 3】；2009 版《数学复习指南》（经济类）精选习题五 1（4）.

（5）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 均为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$，$\boldsymbol{B}^*$ 分别为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，若 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

（A） $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^*\\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　　（B） $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^*\\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$

（C） $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^*\\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　　（D） $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^*\\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　　[　　]

【分析】本题考查分块矩阵的伴随矩阵的计算.考虑到本题条件和备选项特征，本题可用逆推法求解，即根据 $AA^*=A^*A=|A|E$，只要分别计算 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 与四个选项的乘积，看哪一个结果为 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} E_4 = |A||B|E_4$.

【详解】因为 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2|A|E & O \\ O & 3|B|E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A|^2 E & O \\ O & |B|^2 E \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3|A|E & O \\ O & 2|B|E \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} |A||B|E & O \\ O & |A||B|E \end{pmatrix} = |A||B|\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix},$$

而 $\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = |A||B|$，故选（B）.

【评注】本题利用了伴随矩阵的性质 $AA^*=|A|E$.

本题也可以直接求解，如下：

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix}\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}^{-1} = |A||B|\begin{pmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} O & |A||B|B^{-1} \\ |B||A|A^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & |A|B^* \\ |B|A^* & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix},$$

故选（B）.

完全类似公式见文登暑期强化班笔记《线性代数》第 2 讲（重要公式和结论 4）；类似例题见《考研数学精题 660》（2.18）.

（6）设 A，P 均为 3 阶矩阵，P^{T} 为 P 的转置矩阵，且 $P^{\mathrm{T}}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为

（A）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　　[　　]

【分析】本题考查矩阵的计算. 将矩阵表示为$\boldsymbol{Q}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PC}$来计算.

【详解】由题设可知

$$\boldsymbol{Q}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

于是$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AQ}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

故选（A）.

【评注】本题为基础题型. 矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$及其转置均为初等矩阵. 因为矩阵左乘一初等矩阵相当于对其作相应的初等行变换，矩阵右乘一初等矩阵相当于对其作相应的初等列变换. 所以

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$相当于对$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$作将第 2 行加到第 1 行的初等变换，

结果为$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$相当于对$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$作将第 2 列加

到第 1 列的初等变换，结果为$\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

完全类似例题见文登暑期强化班笔记《线性代数》第 2 讲【例 12】;类似例题见 2009 版《数学复习指南》(经济类）第 2 篇第 2 章【例 2.19】.

（7）设事件 A 与事件 B 互不相容，则

（A）$P\left(\overline{A}\overline{B}\right)=0$　　（B）$P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)$

（C）$P\left(A\right)=1-P\left(B\right)$　　（D）$P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=1$　　[　　]

【分析】本题由事件 A 与事件 B 互不相容可得 $P\left(AB\right)=0$，然后利用事件的关系和概率的性质求解.

【详解】由题意可知，$P\left(AB\right)=0\Rightarrow P\left(\overline{AB}\right)=1$，即 $P\left(\overline{A}\cup\overline{B}\right)=1$. 故选（D）.

【评注】由事件 A 与事件 B 互不相容推不出（A）两事件 A、B 的逆事件互不相容；(B) 两事件 A、B 相互独立；(C) 两事件 A、B 互斥，故选（D）.

完全类似例题见 2009 版《数学复习指南》(经济类）第 3 篇第 1 章【例 1.9】.
类似例题见文登暑期强化班笔记《概率论与数理统计》第 1 讲【例 5】.

（8）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从标准正态分布 $N\left(0,1\right)$，Y 的概率分布为 $P\left\{Y=0\right\}=P\left\{Y=1\right\}=\dfrac{1}{2}$，记 $F_Z\left(z\right)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数，则函数 $F_Z\left(z\right)$ 的间断点的个数为

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3　　[　　]

【分析】本题考查函数的间断点和二维随机变量函数的分布函数的计算. 先求出 $F_Z\left(z\right)$ 的表达式，然后再求间断点.

【详解】$F_Z\left(z\right)=P\left\{Z<z\right\}=P\left\{XY<z\right\}$

$$=P\left\{XY<z\,|\,Y=0\right\}P\left\{Y=0\right\}+P\left\{XY<z\,|\,Y=1\right\}P\left\{Y=1\right\}$$

$$=\frac{1}{2}P\left\{0<z\right\}+\frac{1}{2}P\left\{X<z\right\}.$$

当 $z\le 0$ 时，$F_Z\left(z\right)=\dfrac{1}{2}P\left\{X<z\right\}=\dfrac{1}{2}\varPhi_X\left(z\right)$，

当 $z>0$ 时，$F_Z\left(z\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}P\left\{X<z\right\}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\varPhi_X\left(z\right)$.

于是 $\lim\limits_{z\to0^-}F_Z\left(z\right)=\dfrac{1}{2},\lim\limits_{z\to0^+}F_Z\left(z\right)=1$，所以 $z=0$ 为 $F_Z\left(z\right)$ 的间断点，故选（B）.

【评注】本题利用了结论：当 $0<P\left(B\right)<1$ 时，A,B 相互独立 $\Leftrightarrow P(A\,|\,B)=P(A)$.

类似例题见文登暑期强化班笔记《概率论与数理统计》第 3 讲【例 6】；2009 版《数学复习指南》（经济类）第 3 篇第 2 章【例 2.44】，精选习题二 2（11）；《考研数学精题 660》（3.57,3.59）.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上.

（9）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$ ________.

【分析】本题考查“ $\dfrac{0}{0}$ 型 ”未定式极限的计算，利用等价无穷小代换求解即可.

【详解】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}\left(1-\mathrm{e}^{\cos x-1}\right)}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\mathrm{e}\left(\cos x-1\right)}{\frac{1}{3}x^2}=\mathrm{e}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}=\dfrac{3\mathrm{e}}{2}$.

【评注】本题为基础题型. 当 $x\to0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2,\mathrm{e}^x-1\sim x,\left(1+x\right)^m-1\sim mx$.

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 1 讲【例 17】；2009 版《数学复习指南》（经济类）第 1 篇第 1 章【例 1.22】；文登冲刺§1【例 2】；《考研数学精题 660》（1.13）.

（10）设 $z=\left(x+\mathrm{e}^y\right)^x$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$________.

【分析】本题求复合函数的一阶偏导数，先将幂指函数恒等变形为指数函数再计算.

【详解】$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=\left.\mathrm{e}^{x\ln\left(x+\mathrm{e}^y\right)}\left[\ln\left(x+\mathrm{e}^y\right)+\dfrac{x}{x+\mathrm{e}^y}\right]\right|_{(1,0)}=2\left(\ln2+\dfrac{1}{2}\right)=2\ln2+1.$

【评注】本题为基础题型.

完全类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 9 讲【例 6】；《数学复习指南》（经济类）第 1 篇第 6 章【例 6.6】.

（11）幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{e}^n-\left(-1\right)^n}{n^2}x^n$ 的收敛半径为________.

【分析】此为标准形式的幂级数，直接利用公式（见评注）求解.

【详解】 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n-(-1)^n}{n^2}x^n$ 的收敛半径为 $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^n-(-1)^n}{n^2}}{\frac{e^{n+1}-(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}}=e^{-1}$.

【评注】幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的系数满足 $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho$，则收敛半径为：

$$R=\begin{cases}\frac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty\\ +\infty, & \rho=0\\ 0, & \rho=+\infty\end{cases}.$$

完全类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 11 讲【例 12】;《数学复习指南》（经济类）第 1 篇第 8 章【例 8.14】;《考研数学精题 660》（1.378）.

(12) 设某产品的需求函数为 $Q=Q(p)$，其对价格 p 的弹性 $\varepsilon_p=0.2$，则当需求量为 10000 件时，价格增加一元会使产品收益增加________元.

【分析】本题考查弹性的概念.

【详解】收益为 $L=Qp$，于是 $L'=Q'p+Q$.

而 $\varepsilon_p=-\frac{Q'p}{Q}=0.2$，所以 $Q'p=-0.2Q$，即 $L'=0.8Q$，

故 $L'\big|_{Q=10000}=0.8Q\big|_{Q=10000}=8000$，即价格增加一元会使产品收益增加 8000 元.

【评注】要记住 Q 对价格 p 的弹性为 $\varepsilon_p=-\frac{Q'p}{Q}$.

完全类似例题见《数学复习指南》（经济类）第 1 篇第 11 章【例 11.2】;《考研数学精题 660》（1.378）.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(1,0,k)^{\mathrm{T}}$.若矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $k=$________ .

【分析】利用相似矩阵的主对角线元素之和（即矩阵的迹 $\mathrm{tr}(A)$）相等以及 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 等于矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的主对角线元素之和计算.

【详解】 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 为一常数，其值等于矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的主对角线元素之和.

因为矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 相似于 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以 $\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\right)=\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=3$.

故 $3=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1+k$，即 $k=2$.

【评注】对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，若 $r\left(\boldsymbol{A}\right)=1$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$\left|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=\lambda^n-\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\right)\lambda^{n-1}.$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\sum_{i=1}^{n}a_{ii},\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$. 本题中 $r\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\right)=1$，由于矩阵 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 的非零特征值为 3，所以 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=3$，故 $k=2$.

类似例题见文登暑期强化班笔记《线性代数》第 5 讲【例 3】; 2009 版《数学复习指南》(经济类) 第 2 篇第 5 章【例 5.4】; 文登冲刺§1【例 5】.

(14) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自二项分布总体 $B\left(n,p\right)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 设 $T=\overline{X}-S^2$，则 $ET=$__________ .

【分析】直接利用数学期望的性质计算.

【详解】由题意可得 $E\overline{X}=np$，$ES^2=np\left(1-p\right)$. 故

$$ET=E\left(\overline{X}-S^2\right)=E\overline{X}-ES^2=np-np\left(1-p\right)=np^2.$$

【评注】本题为基础题型. 记住无论总体 X 服从什么分布，只要样本 $\left(X_1,\cdots,X_n\right)$ 来自 X，且

$$EX=\mu,\ DX=\sigma^2,$$

则 $E\overline{X}=\mu$，$ES^2=\sigma^2$，其中 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$.

类似例题见 2009 版《数学复习指南》(经济类) 第 3 篇第 5 章【例 5.1】【例 5.2】, ;《考研数学精题 660》(3.118，3.122).

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）**(本题满分 9 分)**

求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

【分析】本题考查二元函数的极值. 利用极值的充分条件判定即可.

【详解】令 $\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x(2+y^2)=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2x^2y+\ln y+1=0\end{cases}$ 解得惟一驻点 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

由于 $A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2(2+y^2), B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=4xy, C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x^2+\dfrac{1}{y}$,

于是

$$\left(B^2-AC\right)\Big|_{\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}=\left[16x^2y^2-2(2+y^2)\left(2x^2+\frac{1}{y}\right)\right]\Bigg|_{\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)}=-2\mathrm{e}\left(2+\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)<0,$$

且 $A>0$.

故 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 为函数 $f(x,y)$ 的极小值点，且极小值为 $f\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

【评注】本题为基础题型.

完全类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 9 讲【例 14】；2009 版《数学复习指南》（经济类）第 1 篇第 6 章【例 6.22】；《考研数学精题 660》（1.272，1.273）.

（16） **(本题满分 10 分)**

计算不定积分 $\displaystyle\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x\ (x>0)$.

【分析】本题先作变量代换 $\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=t$，然后再利用分部积分法求解.

【详解】设 $\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}=t$，则 $x=\dfrac{1}{t^2-1}$，于是

$$\int\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x=\int\ln(1+t)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{t^2-1}\right)=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}-\int\frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t.$$

$$\text{而}\int\frac{1}{t^2-1}\cdot\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t=\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}-\frac{2}{(t+1)^2}\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\ln(t-1)-\frac{1}{4}\ln(t+1)+\frac{1}{2(t+1)}+C.$$

所以

$$\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x=\frac{\ln(1+t)}{t^2-1}+\frac{1}{4}\ln\frac{t+1}{t-1}-\frac{1}{2(t+1)}+C$$

$$=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}+C$$

$$=x\ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{x+x^2}+C.$$

【评注】本题为基础题型. 注意最后一定要将变量还原.

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 3 讲【例 9】；2009 版《数学复习指南》（经济类）第 1 篇第 3 章【例 3.15】.

（17） **(本题满分 10 分)**

计算二重积分 $\iint\limits_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\le 2, y\ge x\right\}$.

【分析】本题可利用极坐标和直角坐标计算.

【详解】方法一　如图 1，区域 D 的极坐标表示为

$$0\le\rho\le 2(\sin\theta+\cos\theta),\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}.$$

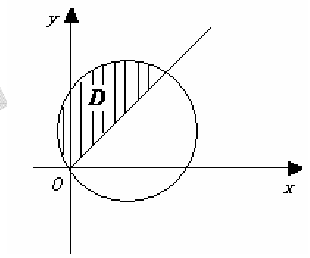


图 1

$$\iint\limits_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2(\sin\theta+\cos\theta)}\rho(\cos\theta-\sin\theta)\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)^3\,\mathrm{d}(\cos\theta+\sin\theta)$$

$$=\frac{2}{3}(\cos\theta+\sin\theta)^4\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=-\frac{8}{3}.$$

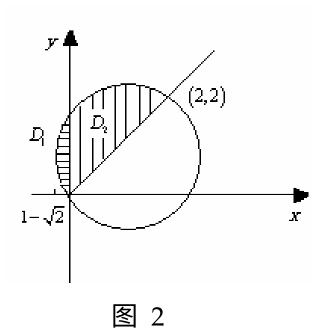


图 2

方法二　将区域 D 分成 D_1,D_2 两部分（如图 2），　其中

$$D_1=\left\{(x,y)\mid 1-\sqrt{2-(x-1)^2}\le y\le 1+\sqrt{2-(x-1)^2},1-\sqrt{2}\le x\le 0\right\},$$

$$D_2=\left\{(x,y)\mid x\le y\le 1+\sqrt{2-(x-1)^2},0\le x\le 2\right\}$$

由二重积分的性质知

$$\iint_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

而

$$\iint_{D_1}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{1-\sqrt{2}}^{0}\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{2-(x-1)^2}}^{1+\sqrt{2-(x-1)^2}}(x-y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{1-\sqrt{2}}^{0}2(x-1)\sqrt{2-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2}{3}\left(\sqrt{2-(x-1)^2}\right)^3\Big|_{1-\sqrt{2}}^{0}=-\frac{2}{3}.$$

$$\iint_{D_2}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^{1+\sqrt{2-(x-1)^2}}(x-y)\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^2\left[2-2(x-1)\sqrt{2-(x-1)^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\left[4+\frac{2}{3}\left(\sqrt{2-(x-1)^2}\right)^3\Big|_0^2\right]=-2.$$

所以$\iint_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{2}{3}-2=-\frac{8}{3}$.

【评注】本题为基础题型.

类似例题见 2009 版《数学复习指南》(经济类)第 1 篇第 7 章【例 7.5】;《考研数学精题 660》(1.299).

(18)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$；

(Ⅱ)证明：若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$，则 $f_+'(0)$ 存在，且 $f_+'(0)=A$.

【分析】(Ⅰ)考查拉格朗日中值定理，利用辅助函数和罗尔定理证明；

(Ⅱ)由(Ⅰ)可证明.

【详解】(Ⅰ)取 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, 由题意知

$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导，且

$$F(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=f(a),$$

$$F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(a).$$

根据罗尔定理, 存在$\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$，即

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

（II）对于任意的$t\in(0,\delta)$，$f(x)$在$[0,t]$上连续，在$(0,t)$内可导，由右导数定义及拉格朗日中值定理有

$$f_+'(0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\lim_{t\to0^+}\frac{f'(\xi)t}{t}=\lim_{t\to0^+}f'(\xi)，其中\xi\in(0,t).$$

由于$\lim\limits_{t\to0^+}f'(t)=A$，且当$t\to0^+$时，$\xi\to0^+$，所以$\lim\limits_{t\to0^+}f'(\xi)=A$.

故$f_+'(0)$存在，且$f_+'(0)=A$.

【评注】本题（I）为教材中一定理， 文登强化班笔记中在中值定理证明部分讲原函数法时特意将拉格朗日中值定理作为例子归纳总结了辅助函数的作法，原笔记如下：

<u>对于拉格朗日中值定理</u>：

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\Rightarrow f(x)+C=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$$

$$\Rightarrow f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x+C=0$$

令$C=0$，取$F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$，

于是$F(a)=F(b)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}$，利用罗尔定理即可证.

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第4讲【例8】；2009版《数学复习指南》（经济类）第1篇第4章【例4.8】;《考研数学精题660》（1.63）.

（19）　**(**本题满分10分)

设曲线$y=f(x)$，其中$f(x)$是可导函数，且$f(x)>0$. 已知曲线$y=f(x)$与直线$y=0,x=1$及$x=t(t>1)$所围成的曲边梯形绕x轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边

梯形面积值的 πt 倍，求该曲线的方程.

【分析】本题利用旋转体的体积公式和平面图形的面积公式建立所求函数满足的方程，然后求解即可.

【详解】由题意知

$\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=\pi t\int_1^t f(x)\mathrm{d}x$，等式两边对 t 求导得

$$f^2(t)=\int_1^t f(x)\mathrm{d}x+tf(t).$$

将 $t=1$ 代入上式得 $f(1)=1$ 或 $f(1)=0$（舍去）.

再求导得 $2f(t)f'(t)=2f(t)+tf'(t)$.

记 $f(t)=y$，则 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{2y}t=1$，因此

$$t=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{2y}\mathrm{d}y}\left(\int\mathrm{e}^{\int\frac{1}{2y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)=y^{-\frac{1}{2}}\left(\int\sqrt{y}\mathrm{d}y+C\right)$$

$$=y^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+C\right)=\frac{C}{\sqrt{y}}+\frac{2}{3}y.$$

将 $t=1,y=1$ 得 $C=\frac{1}{3}$，从而 $t=\frac{2}{3}y+\frac{1}{3\sqrt{y}}$.

故所求曲线方程为 $x=\frac{2}{3}y+\frac{1}{3\sqrt{y}}$.

【评注】(1) 曲线 $y=f_1(x),y=f_2(x)$ 及直线 $x=a,x=b(a<b)$ 所围成的曲边梯形面积为

$S=\int_a^b|f_1(x)-f_2(x)|\mathrm{d}x$. 若在 $[a,b]$ 上，$f_1(x)\le f_2(x)$，则

$$S=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]\mathrm{d}x.$$

(2) 曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a,x=b(a<b)$ 及 x 轴所围成的曲边梯形

① 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为：$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$；

② 绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积为：$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$.

类似例题见文登暑期强化班笔记《高等数学》第 6 讲§1【例 3】；2009 版《数学复习指南》（经济类）第 1 篇第 5 章【例 5.35】；《考研数学精题 660》（1.200，1.202，1.206）.

(20) **(本题满分 11 分)**

设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$，

（Ⅰ）求满足$\boldsymbol{A}\xi_2=\xi_1$，　$\boldsymbol{A}^2\xi_3=\xi_1$的所有向量$\xi_2,\xi_3$；

（Ⅱ）对（Ⅰ）中的任意向量ξ_2,ξ_3证明ξ_1,ξ_2,ξ_3无关.

【分析】　（Ⅰ）解非齐次线性方程组，利用矩阵初等行变换将$\overline{A}\to$阶梯形，然后利用

$A_{m\times n}x=b$ 有解$\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})$（其中$\overline{A}=(A\,|\,b)$）进行判定并求解.

（Ⅱ）可利用$\left|\xi_1,\xi_2,\xi_3\right|\neq 0$或向量组线性无关的定义证明.

【详解】（Ⅰ）$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&-4&-2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&2&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$，

于是$r\left(\boldsymbol{A}\right)=r\left(\overline{\boldsymbol{A}}\right)=2$，取$x_2$为自由变量，可得

$$x_3=-2x_2+1，\ x_1=-x_2.$$

所以$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-x_2\\x_2\\-2x_2+1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，（$x_2=k$为任意常数）.

设$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$，则

$$\overline{\boldsymbol{B}}=\left(\begin{array}{ccc|c}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

于是$r\left(\boldsymbol{B}\right)=r\left(\overline{\boldsymbol{B}}\right)=1$，取$x_2,x_3$为自由变量，则$x_1=-x_2-\dfrac{1}{2}$，所以

$$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-x_2-\frac{1}{2}\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}=k_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\0\end{pmatrix}$$

（其中 $x_2=k_2,x_3=k_3$ 为任意常数）.

（Ⅱ）**证法 1**　由（Ⅰ）知

$$\left|\xi_1,\xi_2,\xi_3\right|=\begin{vmatrix}-1 & -k & -k_2-\frac{1}{2}\\ 1 & k & k_2\\ -2 & -2k+1 & k_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -k & -k_2-\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & -1 & k_3+2k_2+1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\neq 0,$$

所以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

证法 2　由题设可得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1=\mathbf{0}$.设存在数 k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3=\mathbf{0}, \qquad ①$$

等式两端左乘 $\boldsymbol{A}$，得

$$k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_3=\mathbf{0}，即 k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_3=\mathbf{0}，即$$

$$k_2\boldsymbol{\xi}_1+k_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_3=\mathbf{0}. \qquad ②$$

等式两端再左乘 $\boldsymbol{A}$，得

$k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1+k_3\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\mathbf{0}$，即 $k_3\boldsymbol{\xi}_1=\mathbf{0}$，于是 $k_3=0$，代入②式得 $k_2\boldsymbol{\xi}_1=\mathbf{0}$，

故 $k_2=0$.将 $k_2=k_3=0$ 代入①式可得 $k_1=0$，从而 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关

【评注】本题为基础题型.

类似例题见 2009 版《数学复习指南》（经济类）第 2 篇第 4 章【例 4.7】;《考研数学精题 660》（2.37）.

（21）　**(**本题满分 11 分)

设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=ax_1^2+ax_2^2+\left(a-1\right)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$，

（Ⅰ）求二次型 f 的矩阵的所有特征值；

（Ⅱ）若二次型 f 的规范型为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.

【分析】（Ⅰ）先写出二次型 f 的矩阵，然后利用 $\left|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}\right|=0$ 求解.

（Ⅱ）由 f 的规范型为 $y_1^2+y_2^2$ 可知正惯性指数为 2，即可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值中有两个大于零，一个为零，即可得 a 值.

【详解】（Ⅰ）由题设可知二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}.$$

由于 $$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix} \lambda-a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-a & \lambda-a & 0 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}=(\lambda-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ 0 & 2 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a)\left[(\lambda-a)(\lambda-a+1)-2\right]$$

$$=(\lambda-a)\left[\lambda^2-(2a-1)\lambda+a^2-a-2\right]$$

$$=(\lambda-a)(\lambda-a+2)(\lambda-a-1).$$

于是 f 的矩阵 A 所有的特征值为 $\lambda_1=a,\lambda_2=a-2,\lambda_3=a+1$.

（Ⅱ）若二次型 f 的规范型为 $y_1^2+y_2^2$，则它的正惯性指数为 2. 于是 f 的矩阵 A 的特征值中有两个大于零，一个为零. 显然 $\lambda_3>\lambda_1>\lambda_2$， 所以 $\lambda_2=a-2=0$， 即 $a=2$.

【评注】二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X^{\mathrm{T}}AX$, 的规范型若为

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2 \quad (p\le r\le n)\text{（唯一）}.$$

则 p （A 的大于 0 的特征值的个数）称为二次型的正惯性指数，r 称为二次型的秩, $r-p$ （A 的小于 0 的特征值的个数）称为二次型的负惯性指数.

类似例题见文登暑期强化班笔记《线性代数》第 6 讲【例 1】【例 2】；2009 版《数学复习指南》（经济类）第 2 篇第 6 章【例 6.9】【例 6.10】；《考研数学精题 660》（2.90，2.94）.

（22） (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, & 0<y<x \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

（Ⅰ）求条件概率密度 $f_{Y|X}\left(y\,|\,x\right)$；

（Ⅱ）求条件概率 $P\left\{X\le 1\,|\,Y\le 1\right\}$.

【分析】（Ⅰ）利用 $f_{Y|X}\left(y\,|\,x\right)=\dfrac{f\left(x,y\right)}{f_X\left(x\right)}$ 求解；

（Ⅱ）利用 $P\left\{X\le 1\,|\,Y\le 1\right\}=\dfrac{P\left\{X\le 1,Y\le 1\right\}}{P\left\{Y\le 1\right\}}$ 求解.

【详解】（Ⅰ） X 的概率密度为

$$f_X\left(x\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}.$$

当 $x>0$ 时，Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}\left(y\,|\,x\right)=\frac{f\left(x,y\right)}{f_X\left(x\right)}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$$

（Ⅱ） Y 的概率密度为

$$f_Y\left(y\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}.$$

$$P\left\{X\le 1\,|\,Y\le 1\right\}=\frac{P\left\{X\le 1,Y\le 1\right\}}{P\left\{Y\le 1\right\}}=\frac{\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{1}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_0^1\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y}=\frac{\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y}{1-\mathrm{e}^{-1}}=\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}.$$

【评注】本题为基础题型.

类似例题见文登暑期强化班笔记《概率论与数理统计》第 3 讲【例 3】；2009 版《数学复习指南》（经济类）第 3 篇第 2 章【例 2.37】【例 2.38】；《考研数学精题 660》（3.71，3.72，3.73）.

(23)　**(**本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球，2 个黑球与 3 个白球，现有放回地从袋中取两次，每次取一个球.以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

（Ⅰ）求 $P\left\{X=1\,|\,Z=0\right\}$；

（Ⅱ）求二维随机变量 $\left(X,Y\right)$ 的概率分布.

【分析】（Ⅰ）求条件概率，直接利用 $P\left\{X=1\,|\,Z=0\right\}=\dfrac{P\left\{X=1,Z=0\right\}}{P\left\{Z=0\right\}}$ 计算；

（Ⅱ）先确定 X,Y 的可能取值，然后逐个计算 X,Y 取每一对值的概率.

【详解】本题因为是有放回地取球，所以基本事件总数为 6^2.

（Ⅰ）$P\{X=1|Z=0\}=\dfrac{P\{X=1,Z=0\}}{P\{Z=0\}}=\dfrac{2\dfrac{C_1^1C_2^1}{6^2}\cdot\dfrac{2}{6}}{\dfrac{C_3^1C_3^1}{6^2}}=\dfrac{4}{9}$.

（Ⅱ）X,Y 的可能取值均为 0,1,2, 且

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{C_3^1\cdot C_3^1}{6^2}=\frac{9}{36}，\quad P\{X=0,Y=1\}=\frac{2C_2^1\cdot C_3^1}{6^2}=\frac{12}{36},$$

$$P\{X=0,Y=2\}=\frac{C_2^1\cdot C_2^1}{6^2}=\frac{4}{36}，\quad P\{X=1,Y=0\}=\frac{2C_1^1\cdot C_3^1}{6^2}=\frac{6}{36},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{2C_1^1\cdot C_2^1}{6^2}=\frac{4}{36}，\quad P\{X=1,Y=2\}=0,$$

$$P\{X=2,Y=0\}=\frac{C_1^1\cdot C_1^1}{6^2}=\frac{1}{36}，\quad P\{X=2,Y=1\}=0, P\{X=2,Y=2\}=0.$$

所以二维随机变量 $f(x,y)$ 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{36}$	0	0

【评注】本题为基础题型. 古典概型概率计算公式如下：

$$P(A)=\frac{A\text{ 中包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

完全类似例题见《考研数学精题 660》（3.45）.

类似例题见文登暑期强化班笔记《概率论与数理统计》第 1 讲【例 7】; 2009 版《数学复习指南》（经济类）第 3 篇第 2 章【例 2.31】【例 2.36】.