首届全国大学生数学竞赛赛区赛试卷参考答案

（数学类，2009）

一、求经过三平行直线$L_1: x=y=z$，$L_2: x-1=y=z+1$，$L_3: x=y+1=z-1$的圆柱面的方程.

解： 先求圆柱面的轴L_0的方程. 由已知条件易知，圆柱面母线的方向是$\vec{n}=(1,1,1)$， 且圆柱面经过点$O(0,0,0)$， 过点$O(0,0,0)$且垂直于$\vec{n}=(1,1,1)$的平面π的方程为： $x+y+z=0$.

π与三已知直线的交点分别为$O(0,0,0), P(1,0,-1), Q(0,-1,1)$

圆柱面的轴L_0是到这三点等距离的点的轨迹， 即

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+y^2+(z+1)^2 \\ x^2+y^2+z^2=x^2+(y+1)^2+(z-1)^2 \end{cases},$$

即

$$\begin{cases} x-z=1 \\ y-z=-1 \end{cases},$$

将L_0的方程改为标准方程

$$x-1=y+1=z.$$

圆柱面的半径即为平行直线$x=y=z$和$x-1=y+1=z$之间的距离. $P_0(1,-1,0)$

为L_0上的点.

对圆柱面上任意一点$S(x,y,z)$， 有$\dfrac{|\vec{n}\times\overrightarrow{P_0S}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|\vec{n}\times\overrightarrow{P_0O}|}{|\vec{n}|}$， 即

$$(-y+z-1)^2+(x-z-1)^2+(-x+y+2)^2=6,$$

所以，所求圆柱面的方程为：

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz-3x+3y=0.$$

二、设$C^{n\times n}$是$n\times n$复矩阵全体在通常的运算下所构成的复数域C上的线性空间，

$$F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

（1）假设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，若 $AF=FA$，证明：

$$A=a_{n1}F^{n-1}+a_{n-11}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E；$$

（2）求 $C^{n\times n}$ 的子空间 $C(F)=\left\{X\in C^{n\times n}\mid FX=XF\right\}$ 的维数.

（1）的证明: 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$， $M=a_{n1}F^{n-1}+a_{n-11}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E$. 要证明 $M=A$，只需证明 A 与 M 的各个列向量对应相等即可.若以 e_i 记第 i 个基本单位列向量.于是，只需证明：对每个 i， $Me_i=Ae_i(=\alpha_i)$.

若记 $\beta=(-a_n,-a_{n-1},\cdots,-a_1)^T$， 则 $F=(e_2,e_3,\cdots,e_n,\beta)$.注意到，

$$Fe_1=e_2,F^2e_1=Fe_2=e_3,\cdots,F^{n-1}e_1=F(F^{n-2}e_1)=Fe_{n-1}=e_n \qquad （*）$$

由

$$\begin{aligned} Me_1&=(a_{n1}F^{n-1}+a_{n-11}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E)e_1 \\ &=a_{n1}F^{n-1}e_1+a_{n-11}F^{n-2}e_1+\cdots+a_{21}Fe_1+a_{11}Ee_1 \\ &=a_{n1}e_n+a_{n-11}e_{n-1}+\cdots+a_{21}e_2+a_{11}e_1 \\ &=\alpha_1=Ae_1 \end{aligned}$$

知 $Me_2=MFe_1=FMe_1=FAe_1=AFe_1=Ae_2$

$$Me_3=MF^2e_1=F^2Me_1=F^2Ae_1=AF^2e_1=Ae_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Me_n=MF^{n-1}e_1=F^{n-1}Me_1=F^{n-1}Ae_1=AF^{n-1}e_1=Ae_n$$

所以， $M=A$.

（2）解： 由（1）， $C(F)=span\{E,F,F^2,\cdots,F^{n-1}\}$，

设 $x_0E+x_1F+x_2F^2+\cdots+x_{n-1}F^{n-1}=O$， 等式两边同右乘 e_1，利用（*）得

$$\theta=Oe_1=(x_0E+x_1F+x_2F^2+\cdots+x_{n-1}F^{n-1})e_1$$

$$
\begin{aligned}
&= x_0Ee_1 + x_1Fe_1 + x_2F^2e_1 + \cdots + x_{n-1}F^{n-1}e_1 \\
&= x_0e_1 + x_1e_2 + x_2e_3 + \cdots + x_{n-1}e_n
\end{aligned}
$$

因$e_1,e_2,e_3,\cdots,e_n$线性无关，故，$x_0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$

所以，$E,F,F^2,\cdots,F^{n-1}$线性无关.因此，$E,F,F^2,\cdots,F^{n-1}$是$C(F)$的基，特别地，$\dim C(F) = n$.

三、假设V是复数域C上n维线性空间（$n>0$），f,g是V上的线性变换.如果$fg-gf=f$，证明：f的特征值都是 0，且f,g有公共特征向量.

证明：假设λ_0是f的特征值，W是相应的特征子空间，即$W=\{\eta\in V \mid f(\eta)=\lambda_0\eta\}$.于是，$W$在$f$下是不变的.

下面先证明，λ_0=0.任取非零$\eta\in W$，记m为使得$\eta,g(\eta),g^2(\eta),\cdots,g^m(\eta)$线性相关的最小的非负整数，于是，当$0\le i\le m-1$时，$\eta,g(\eta),g^2(\eta),\cdots,g^i(\eta)$线性无关

$0\le i\le m-1$时令$W_i = span\{\eta,g(\eta),g^2(\eta),\cdots,g^{i-1}(\eta)\}$，其中，$W_0=\{\theta\}$.因此，$\dim W_i = i$（$1\le i\le m$），并且，$W_m = W_{m+1} = W_{m+2} = \cdots$. 显然，$g(W_i)\subseteq W_{i+1}$，特别地，$W_m$在$g$下是不变的.

下面证明，W_m在f下也是不变的.事实上，由$f(\eta)=\lambda_0\eta$，知

$$fg(\eta) = gf(\eta) + f(\eta) = \lambda_0 g(\eta) + \lambda_0\eta$$

$$
\begin{aligned}
fg^2(\eta) &= gfg(\eta) + fg(\eta) \\
&= g(\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0\eta) + (\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0\eta) \\
&= \lambda_0 g^2(\eta) + 2\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0\eta
\end{aligned}
$$

根据

$$
\begin{aligned}
fg^k(\eta) &= gfg^{k-1}(\eta) + fg^{k-1}(\eta) \\
&= g(fg^{k-1})(\eta) + fg^{k-1}(\eta)
\end{aligned}
$$

用归纳法不难证明，$fg^k(\eta)$一定可以表示成$\eta,g(\eta),g^2(\eta),\cdots,g^k(\eta)$的线性组合，且表示式中$g^k(\eta)$前的系数为$\lambda_0$.

因此，W_m在f下也是不变的，f在W_m上的限制在基$\eta,g(\eta),g^2(\eta),\cdots,g^{m-1}(\eta)$

下的矩阵是上三角矩阵，且对角线元素都是 λ_0，因而，这一限制的迹为 $m\lambda_0$. …..（10 分)

由于 $fg-gf=f$ 在 W_m 上仍然成立，而 $fg-gf$ 的迹一定为零，故 $m\lambda_0=0$，即 λ_0 =0.

任取 $\eta\in W$，由于 $f(\eta)=\theta$，$fg(\eta)=gf(\eta)+f(\eta)=g(\theta)+f(\eta)=\theta$，所以，$g(\eta)\in W$.因此，W 在 g 下是不变的.从而，在 W 中存在 g 的特征向量，这也是 f,g 的公共特征向量.

四、设 $\{f_n(x)\}$ 是定义在 $[a,b]$ 上的无穷次可微的函数序列且逐点收敛，并在 $[a,b]$ 上满足 $|f_n'(x)|\le M$.（1）证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛；（2）设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$，问 $f(x)$ 是否一定在 $[a,b]$ 上处处可导,为什么？

证明：（1）$\forall\varepsilon>0$，将区间 $[a,b]$ K 等分，分点为 $x_j=a+\dfrac{j(b-a)}{K},\quad j=0,1,2,\cdots,K$，使得 $\dfrac{b-a}{K}<\varepsilon$. 由于 $\{f_n(x)\}$ 在有限个点 $\{x_j\}, j=0,1,2,\cdots,K$ 上收敛，因此 $\exists N$，$\forall m>n>N$，使得 $|f_m(x_j)-f_n(x_j)|<\varepsilon$ 对每个 $j=0,1,2,\cdots,K$ 成立.

于是 $\forall x\in[a,b]$，设 $x\in[x_j,x_{j+1}]$，则

$$|f_m(x)-f_n(x)|\le|f_m(x)-f_m(x_j)|+|f_m(x_j)-f_n(x_j)|+|f_n(x_j)-f_n(x)|,$$

$$=|f_m'(\xi)(x-x_j)|+|f_m(x_j)-f_n(x_j)|+|f_n'(\eta)(x-x_j)|<(2M+1)\varepsilon.$$

（2）不一定.

令 $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}$，则 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上不能保证处处可导.

五、设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\dfrac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt$，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$ 发散.

解：
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt=\int_0^{\frac{\pi}{n}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt+\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt=I_1+I_2$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{n}} t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3 dt<n^3\int_0^{\frac{\pi}{n}} tdt=\frac{\pi^2 n}{2},$$

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3 dt<\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} t\cdot\left(\frac{\pi}{2t}\right)^3 dt=-\frac{\pi^3}{8}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$=\frac{\pi^3}{8}\left(\frac{n}{\pi}-\frac{2}{\pi}\right)<\frac{\pi^2 n}{8}.$$

因此$\frac{1}{a_n}>\frac{1}{\pi^2 n}$，由此得到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$发散.

六、$f(x,y)$ 是 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上二次连续可微函数，满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2y^2$，计算积分

$$I=\iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy.$$

解： 采用极坐标$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$I=\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)rd\theta=\int_0^1 dr\int_{x^2+y^2=r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dy-\frac{\partial f}{\partial y}dx\right)$$

$$=\int_0^1 dr\iint_{x^2+y^2\le r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial y^2}\right)dxdy=\int_0^1 dr\iint_{x^2+y^2\le r^2}\left(x^2y^2\right)dxdy$$

$$=\int_0^1 dr\int_0^r \rho^5 d\rho\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta=\frac{\pi}{168}$$

七、假设函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，在 $(0,\ 1)$ 内二阶可导，过点 $A(0,\ f(0))$，与点 $B(1,\ f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,\ f(c))$，其中 $0<c<1$. 证明：在 $(0,\ 1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

证明：因为 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上满足 $Lagrange$ 中值定理的条件，故存在 $\xi_1\in(0,\ c)$， 使 $f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}$.

由于 C 在弦 AB 上，故有

$$\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0).$$

从而 $f'(\xi_1)=f(1)-f(0)$.

同理可证，存在 $\xi_2\in(c,\ 1)$，使 $f'(\xi_2)=f(1)-f(0)$.

由 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$，知 在$[\xi_1,\ \xi_2]$上 $f'(x)$满足 *Rolle* 定理的条件，所以存在 $\xi\in(\xi_1,\ \xi_2)\subset(0,\ 1)$，使 $f''(\xi)=0$.