浙江科技学院第九届高等数学竞赛试题

2013.5.18　(8:30---10:30)

1．计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$ 　　（12 分）

解一：原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt[6]{1+x^{-1}}-\sqrt[6]{1-x^{-1}})=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[6]{1+x^{-1}}-\sqrt[6]{1-x^{-1}}}{x^{-1}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[6]{1+x^{-1}}-1}{x^{-1}}-\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[6]{1-x^{-1}}-1}{x^{-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{6}x^{-1}}{x^{-1}}-\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{6}x^{-1}}{x^{-1}}=\frac{1}{3}$$

解二：　令 $t=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to+\infty$时，$t\to0^+$

$$\text{原式}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt[6]{1+t}-\sqrt[6]{1-t}}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt[6]{1+t}-1}{t}-\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt[6]{1-t}-1}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{6}t}{t}-\lim_{t\to0^+}\frac{-\frac{1}{6}t}{t}=\frac{1}{3}$$

2．计算 $\displaystyle\int\frac{(1+x)e^x}{(x+2)^2}dx$ 　　（12 分）

解一：$\displaystyle\int\frac{(1+x)e^x}{(x+2)^2}dx=-\int(1+x)e^x d(\frac{1}{x+2})$

$$=-\frac{(x+1)e^x}{x+2}+\int\frac{1}{x+2}d[(x+1)e^x]=-\frac{(x+1)e^x}{x+2}+\int e^x dx=\frac{e^x}{x+2}+C$$

解二：$\displaystyle\int\frac{(1+x)e^x}{(x+2)^2}dx=\int\frac{(2+x)-1}{(x+2)^2}e^x dx=\int\frac{e^x}{x+2}dx-\int\frac{e^x}{(x+2)^2}dx$

$$=\int\frac{1}{x+2}de^x-\int\frac{e^x}{(x+2)^2}dx=\frac{e^x}{x+2}+\int\frac{e^x}{(x+2)^2}dx-\int\frac{e^x}{(x+2)^2}dx=\frac{e^x}{x+2}+C$$

3．设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$上连续可微，$f(x)>0,\ f(0)=1,$ 当 $x\ge0$ 时，$\dfrac{f'(x)}{f(x)}<1,$

证明：当 $x>0$ 时，$e^x>f(x).$ 　　（12分）

解一　令 $g(x)=f(x)e^{-x}$，则 $g(0)=f(0)=1,$

$g'(x)=[f'(x)-f(x)]e^x$，　由条件得，$g'(x)<0$

故 $g(x)$在$[0,+\infty)$上递减，即有　$g(x)<g(0)$

即　$f(x)e^{-x}<1$，所以　$e^x>f(x).$

解二　令 $g(x)=\dfrac{e^x}{f(x)}$，则 $g(0)=f(0)=1,$

$g'(x)=\dfrac{[f(x)-f'(x)]e^x}{f^2(x)}$，　由条件得，$g'(x)>0$

故 $g(x)$在$[0,+\infty)$上递增，有　$g(x)>g(0)$

即 $\dfrac{e^x}{f(x)}>1$，　所以　$e^x>f(x).$

解三　　待证不等式等价于$\ln f(x) < x$

. 　令 $g(x) = \ln f(x) - x$，则 $g(0) = \ln f(0) = 0$，

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - 1,\quad \text{由条件得，} g'(x) < 0$$

故 $g(x)$在$[0,+\infty)$上递减，即有　$g(x) < g(0)$

也即$\ln f(x) - x < 0$，　所以　$e^x > f(x)$.

解四　待证不等式等价于$\ln f(x) < x$

由题设得　$[\ln f(x)]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)} < 1$,

在$[0,x]$上作积分，得$\int_0^x [\ln f(x)]'dx < \int_0^x dx$,

即　$\ln f(x) - \ln f(0) < x$,

又 $f(0)=1$，所以　$\ln f(x) < x$，即$e^x > f(x)$.

4. 计算　$\int_0^1 dy \int_1^y (e^{-x^2} + \sin x)dx$.　　　（12 分）

解　$\int_0^1 dy \int_1^y (e^{-x^2} + \sin x)dx = -\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2}dx + \int_0^1 dy \int_1^y \sin x dx$

而　$\int_0^1 dy \int_1^y \sin x dx = \int_0^1 (\cos 1 - \cos y)dy = \cos 1 - \sin 1$

$$-\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2}dx = -\int_0^1 dx \int_0^x e^{-x^2}dy = -\int_0^1 xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e^{-1}-1)$$

所以　$\int_0^1 dy \int_y^1 (e^{-x^2} + \sin x)dx = \dfrac{1}{2}(e^{-1}-1) + \cos 1 - \sin 1$.

5. 设$z = f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且$f(x,2x) = x$,
$f_x(x,2x) = x^2 + 2x$，$f_{xx} = f_{yy}$，求 $f_y(x,2x)$，$f_{xy}(x,2x)$.　　　（12分）

解　在 $f(x,2x) = x$ 两边对x求导，得 $f_x(x,2x) + 2f_y(x,2x) = 1$,

将 $f_x(x,2x) = x^2 + x$ 代入上式，得 $f_y(x,2x) = \dfrac{1}{2}(1 - 2x - x^2)$,

上式 两边对x求导，得 $f_{yx}(x,2x) + 2f_{yy}(x,2x) = -1 - x$,　(1)

在 $f_x(x,2x) = x^2 + 2x$两边对x求导，得 $f_{xx}(x,2x) + 2f_{xy}(x,2x) = 2x + 2$，(2)

由条件 $f_{xx} = f_{yy}$及(1)、(2)式得，$f_{xy}(x,2x) = \dfrac{5}{3}(x+1)$

6．设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有连续的导数，求$I=\int_L \frac{1+y^2 f(xy)}{y}dx+\frac{x[y^2 f(xy)-1]}{y^2}dy$，

其中L：从点$A(3,\frac{4}{3})$到$B(1,4)$的直线段．（12分）

解一　记 $P=\frac{1+y^2 f(xy)}{y}$，$Q=\frac{x[y^2 f(xy)-1]}{y^2}$，

$P_y=Q_x=-\frac{1}{y^2}+f(xy)+xyf'(xy)$ 故曲线积分与路径无关，

选路径为由点$A(3,\frac{4}{3})\to C(3,4)\to B(1,4)$的折线段，

$$I=\int_{\frac{4}{3}}^{4}3[f(3y)-\frac{1}{y^2}]dy+\int_3^1[\frac{1}{4}+4f(4x)]dx$$

$$=\int_{\frac{4}{3}}^{4}3f(3y)dy-\frac{3}{2}+\int_3^1 4f(4x)dx-\frac{1}{2}=-2$$

或选路径为由点$A(3,\frac{4}{3})\to C(3,4)\to B(1,4)$的折线段，

$$I=\int_3^1[\frac{4}{3}+\frac{4}{3}f(\frac{4}{3}x)]dx+\int_{\frac{4}{3}}^{4}[f(y)-\frac{1}{y^2}]dy=-2$$

解二　$I=\int_L(\frac{1}{y}dx-\frac{x}{y^2}dy)+[yf(xy)dx+xf(xy)dy]$

$$=\int_L d\frac{x}{y}+f(xy)d(xy)=\int_L d\frac{x}{y}+\int_L f(xy)d(xy)$$

因为$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续，故$f(x)$有原函数，设$F'(x)=f(x)$

故 $I=\frac{x}{y}\Big|_{(3,\frac{4}{3})}^{(1,4)}+F(xy)\Big|_{(3,\frac{4}{3})}^{(1,4)}=-2$

7．设 $f(x)$在$[0,1]$上可导，且 $f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}x^3 f(x)\mathrm{d}x=0$，

证明：存在$\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=-\frac{3f(\xi)}{\xi}$　　（14分），

证明　令 $\varphi(x)=x^3 f(x)$，$x\in[0,1]$，又$f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}x^3 f(x)\mathrm{d}x=0$，据积分中值定理得

$\exists c\in(0,\frac{1}{2})$，使得$c^3 f(c)=f(1)$，　故有 $\varphi(1)=\varphi(c)$，由洛尔定理，

存在$\xi\in(c,1)\subset(0,1)$，使 $\varphi'(\xi)=0$ ，

而 $\varphi'(x)=3x^2 f(x)+x^3 f'(x)$，故$3\xi^2 f(\xi)+\xi^3 f'(\xi)=0$

又$\xi\neq 0$，故有 $3f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=-\frac{3f(\xi)}{\xi}$.

8. 注： 高年级同学做第（1）题，一年级同学做第（2）题，否则无效。

(1) 设 $a_n > 0,\ b_n > 0, (n=1,2,\cdots)$， 证明： （14 分）

当 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} \ge \dfrac{1}{2}$（$n\in N$） 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

（1） 证明 由 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} b_n - b_{n+1} \ge \dfrac{1}{2}$ 得 $a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} > \dfrac{1}{2} a_{n+1} > 0$，

故数列 $\{a_n b_n\}$ 递减， 又 $a_n b_n > 0$， 所以数列 $\{a_n b_n\}$ 收敛，

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1})$ 的前 n 项和 $S_n = a_1 b_1 - a_{n+2} b_{n+2}$ 收敛，

从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1})$ 收敛，

由上式 $\dfrac{1}{2} a_{n+1} < a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1}$，再根据比较判别法，知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 .

(2) 设 $x \in [-1,1]$，求 $f(x) = \int_{-1}^{1} |t-x| e^t dt$ 的最大值. （14 分）

解

$$f(x) = \int_{-1}^{x} (x-t)e^t dt + \int_{x}^{1} (t-x)e^t dt = x\int_{-1}^{x} e^t dt - \int_{-1}^{x} te^t dt + \int_{x}^{1} te^t dt - x\int_{x}^{1} e^t dt,$$

则 $f'(x) = \int_{-1}^{x} e^t dt - \int_{x}^{1} e^t dt,\ f''(x) = 2e^x > 0,$

故曲线 $y = f(x)\ x\in[-1,1]$ 是凹的，

从而 $f(x)$ 的最大值只能在 $x=-1$ 或 $x=1$ 取到，

又 $f(-1) = \int_{-1}^{1} (t+1)e^t dt = e + e^{-1}$， $f(1) = \int_{-1}^{1} (1-t)e^t dt = e - 3e^{-1}$

故 $f(x)$ 的最大值为 $f(-1) = e^{-1} + e$.

或 求出 $f(x) = \int_{-1}^{x} (x-t)e^t dt + \int_{x}^{1} (t-x)e^t dt$

$$= (x-t+1)e^t \Big|_{-1}^{x} + (t-x-1)e^t \Big|_{x}^{1} = 2e^x - x(e^{-1}+e) - 2e^{-1}$$