浙江科技学院第十届高等数学竞赛试题

2014.5.25

1. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有二阶导数，$\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3$，试求 $f(0)$， $f'(0)$ 及 $f''(0)$.

解 1： $\lim\limits_{x\to 0}[1+x+\dfrac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}=e^3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+x+\dfrac{f(x)}{x}]}{x}=3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\ln[1+x+\dfrac{f(x)}{x}]=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0) \Rightarrow f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$，

由等价无穷小得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\dfrac{f(x)}{x}}{x}=3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{2x}=2 \Rightarrow f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=4$

解 2： $\lim\limits_{x\to 0}[1+x+\dfrac{f(x)}{x}]^{\frac{1}{x}}=e^3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+x+\dfrac{f(x)}{x}]}{x}=3 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}[x+\dfrac{f(x)}{x}]=0$

从而有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[1+x+\dfrac{f(x)}{x}]}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\dfrac{f(x)}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+f(x)}{x^2}=3$

又 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有二阶导数，故 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$，

从而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0)+f'(0)x+[\dfrac{f''(0)}{2}+1]x^2+o(x^2)}{x^2}=3$，所以 $f(0)=f'(0)=0$， $f''(0)=4$

2. 设 $y=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$，求 $y^{(100)}(0)$。（14 分）

解 1：由于 $y=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}=(x-1)^{-1}+2(x-1)^{-2}$，

$[(1-x)^{-1}]^{(100)}=(-1)(-2)\cdots(-100)(1-x)^{-101}=100!(1-x)^{-101}$,

$[(1-x)^{-2}]^{(100)}=(-2)\cdots(-100)(-101)(1-x)^{-102}=101!(1-x)^{-102}$

于是 $y^{(100)}(0)=100!+2\times 101!=203\times 100!$

解 2：$y=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}=(x-1)^{-1}+2(x-1)^{-2}$,

由于 $(1-x)^{-1}$ 的马克老林公式为 $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots+x^{100}+o(x^{100})$,

而 $(1-x)^{-2}$ 的马克老林公式为 $(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+\cdots+100x^{99}+101x^{100}+o(x^{100})$,

所以 $\dfrac{y^{(100)}(0)}{100!}=1+2\times 101=203$，即 $y^{(100)}(0)=203\times 100!$

3. 求不定积分 $\int\dfrac{x^2+1}{x^4+1}dx$.（14 分）

解 1：$\int\dfrac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int\dfrac{1+x^{-2}}{x^2+x^{-2}}dx$

$$=\int\frac{d(x-x^{-1})}{(x-x^{-1})^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-x^{-1}}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}+C$$

解 2：$\int\dfrac{x^2+1}{x^4+1}dx=\int\dfrac{x^2+1}{(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2}dx=\int\dfrac{x^2+1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)}dx$

$$=\frac{1}{2}\int[\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}]dx=\frac{1}{2}\int[\frac{1}{(x+\sqrt{2}/2)^2+1/2}+\frac{1}{(x-\sqrt{2}/2)^2+1/2}]dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}})+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}})+C.$$

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $0<f'(x)<1$，$f(0)=0$，证明：$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2>\int_0^1 f^3(x)dx$。（14 分）

解：令 $F(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2-\int_0^x f^3(t)dt$，则 $F(0)=0$，

因为 $0<f'(x)<1$，$f(0)=0$，所以当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)>0$。

$$F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)dt-f^3(x)=f(x)[2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)]$$，（$x\in(0,1)$）

记$g(x)=2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)$，则$g(0)=0$，$g'(x)=2f(x)(1-f'(x))>0$.

故$g(x)$在$[0,1]$上单调递增。当$x>0$时，$g(x)>g(0)$，即$F'(x)>0$

于是当$x>0$时，$F(x)>F(0)=0$，因此$F(1)=\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2-\int_0^1 f^3(t)dt>0$，即结论真

5. 求由方程$x^4+y^4+z^2-4x+4y-4z-6=0$所确定的函数$z=f(x,y)$的极值。(15 分)

解： 两边关于x,y求偏导数得：$\begin{cases}4x^3+2zz'_x-4-4z'_x=0\\4y^3+2zz'_y+4-4z'_y=0\end{cases}$，

令$z'_x=0=z'_y$，解得$x=1,\ y=-1$，代入原方程得$z^2-4z-12=0$，解得$z=6$和$z=-2$。上式关于x,y分别

再求导得：$\begin{cases}12x^2+2(z'_x)^2+2zz''_{xx}-4z''_{xx}=0\\12y^2+2(z'_y)^2+2zz''_{yy}-4z''_{yy}=0\\2z'_xz'_y+2zz''_{xy}-4z''_{xy}=0\end{cases}$，

$$A=z''_{xx}\big|_{(1,-1)}=\frac{6}{2-z}\bigg|_{(1,-1)},\ B=z''_{xy}\big|_{(1,-1)}=0,\ C=z''_{yy}\big|_{(1,-1)}=\frac{6}{2-z}\bigg|_{(1,-1)}.$$

$AC-B^2=\dfrac{36}{(2-z)^2}\bigg|_{(1,-1)}>0$， 所以$z=f(x,y)$在$x=1,\ y=-1$处有极值。

因当$z=6$时，$A<0$，所以该函数此时有极大值$z=6$。

又当$z=-2$时，$A>0$，所以该函数此时有极小值$z=-2$。

6. 一平面经过x轴并与y轴正向之间的夹角为$\pi/6$，且在第 I 和 II 卦限该平面位于xoy上方，求它与椭圆柱面$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$及$xoy$面所围成的立体体积（取$xoy$面上方部分）。(14 分)

解 1 :固定x,由于垂直于x轴的截面为一个直角三角形,其中的一个角度是$\pi/6$,三角形的一条直角边为$y=4\sqrt{1-\dfrac{x^2}{3^2}}$，

故该直角三角形的面积为 $A(x)=\frac{1}{2}\times\left(4\sqrt{1-\frac{x^2}{3^2}}\right)^2\times\tan\frac{\pi}{6}=\frac{8}{9\sqrt{3}}(9-x^2)$，

故所求立体的体积 $V=\int_{-3}^{3}\frac{8}{9\sqrt{3}}(9-x^2)dx=\frac{16}{9\sqrt{3}}\int_0^3(9-x^2)dx=\frac{16}{9\sqrt{3}}(27-\frac{1}{3}\cdot 3^3)=\frac{32}{\sqrt{3}}$.

解 2：因平面过 x 轴并与 y 轴正向之间的夹角为 $\pi/6$，根据柱面知识，该平面方程为 $z=y\tan\frac{\pi}{6}=\frac{y}{\sqrt{3}}$

（或者：所以法向量的方向角为 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，$\beta=\frac{2\pi}{3}$，$\gamma=\frac{\pi}{6}$，即法向量可取为 $\vec{n}=2(0,\cos\frac{2\pi}{3},\cos\frac{\pi}{6})=(0,-1,\sqrt{3})$，

于是，该平面方程为 $-(y-0)+\sqrt{3}(z-0)=0$，即 $z=\frac{y}{\sqrt{3}}$ ……. 6 分）

$$V=\iint\limits_{\substack{x^2/9+y^2/16\le 1,\\ y\ge 0.}} zdxdy=\int_{-3}^{3}dx\int_0^{4\sqrt{1-\frac{x^2}{3^2}}}y/\sqrt{3}dy=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^3 16(1-\frac{x^2}{3^2})dx=\frac{16}{\sqrt{3}}(3-\frac{3^3}{3^3})=\frac{32}{\sqrt{3}}.$$

7. 试解以下题（注： 高年级同学做第（1）题，一年级同学做第（2）题，否则无效。）

（1）判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{n})}\right]$ 的敛散性.（高年级做）（14 分）

解：我们知道当 $x>0$ 时，有 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$，所以 $\frac{1}{n+1}=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$，

$$0<\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln(1+\frac{1}{n})}<\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}<\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}<\frac{1}{n^{3/2}},$$

因 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，由比较判别法得原级数收敛。

（2）设 $f(x)$ 在 $[\alpha,\alpha+\beta]$ 上可导，又 $0<\beta<1$，$f(\alpha)=0$，$|f'(x)|\le|f(x)|$，试证 $f(x)\equiv 0$。（14 分）

证明：因 $f(x)$ 在 $[\alpha,\alpha+\beta]$ 上连续，由最值定理，存在 $x_0\in[\alpha,\alpha+\beta]$ 使得：$M=\max\limits_{x\in[\alpha,\alpha+\beta]}|f(x)|=|f(x_0)|$

假设 $M\neq 0$，由于 $f(\alpha)=0$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(\alpha,\alpha+\beta)$，使得：

$M=|f(x_0)-f(\alpha)|=|f'(\xi)(x_0-\alpha)|\le|f(\xi)|\beta<|f(x_0)|=M$，

这是不可能的。即 $M=0$，换言之，$f(x)\equiv 0$。