2012 年研究生入学考试数学一试题及解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3　　[　　]

【分析】本题求曲线的渐近线，利用常规方法即可:

（1）水平渐近线

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$，则直线 $y=b$ 称为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

（2）垂直渐近线

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$，则直线 $x=x_0$ 称为曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.

（3）斜渐近线

若 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$，$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]$，则 $y=ax+b$ 成为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

【详解】 $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}\overset{\text{抓大头}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$，

所以 $y=1$ 是曲线的水平渐近线，则曲线无斜渐近线.

因为 $x=\pm1$ 时，$y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 无意义,

又 $\lim\limits_{x\to1} y=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\infty$，

$\lim\limits_{x\to-1} y=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $x=1$ 是曲线的垂直渐近线。

综上，曲线有两条渐近线，故应选（C）。

【评注】当 $x\to\infty\left(\text{或}x\to+\infty\text{或}x\to-\infty\right)$ 时，曲线有水平渐近线，则无斜渐近线。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第 6 讲【例 13】【例 14】.

（2）设函数 $y(x)=\left(\mathrm{e}^x-1\right)\left(\mathrm{e}^{2x}-2\right)\cdots\left(\mathrm{e}^{nx}-n\right)$，其中 n 为正整数，则 $y'(0)=$

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$ （B）$(-1)^{n}(n-1)!$ （C）$(-1)^{n-1}n!$ （D）$(-1)^{n}n!$ [ ]

【分析】本题求函数在一点的导数值，可直接用定义进行运算。

【详解】$y(0)=0$，则

$$y'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{y(x)-y(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{(\mathrm{e}^{x}-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}\lim_{x\to 0}(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!\text{。}$$

故选（A）。

【评注】本题求n个因子的乘积在一点的导数值，也可利用$(uv)'=u'v+uv'$计算。因为乘积项中只有$(\mathrm{e}^{x}-1)\big|_{x=0}=0$，所以求导时，将它作为一项，其他乘积作为一项进行运算。

$$y'(x)=(\mathrm{e}^{x}-1)\left[(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)\right]'+(\mathrm{e}^{x}-1)'\left[(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)\right],$$

所以

$$y'(0)=(\mathrm{e}^{0}-1)\left[(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)\right]'\big|_{x=0}+(\mathrm{e}^{x}-1)'\big|_{x=0}\left[(\mathrm{e}^{0}-2)\cdots(\mathrm{e}^{0}-n)\right]$$

$$=0+(-1)^{n-1}(n-1)!=(-1)^{n-1}(n-1)!,$$

故选（A）。

完全类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第2讲【例5】.

（3）如果函数$f(x,y)$在$(0,0)$处连续，则下列命题正确的是

（A） 若极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$存在，则$f(x,y)$在$(0,0)$处可微

（B） 若极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在，则$f(x,y)$在$(0,0)$处可微

（C）若$f(x,y)$在$(0,0)$处可微，则极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$存在

（D）若$f(x,y)$在$(0,0)$处可微，则极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在 [ ]

【分析】本题考查二元连续函数可微的充分条件和必要条件。由于各选项均有条件和结论，

则需逐项判断求解。

【详解】题设中已知函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，则有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=f(0,0)。$$

对选项（A），若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0=f(0,0)$。

下面来看 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\overset{?}{=}0$，

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{|x|}\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x},$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)}{|x|}$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在，

所以 $f_x'(0,0)$ 不一定存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微。

对选项（B），若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，同理可得 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0=f(0,0)$。

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=0,$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)}{y^2}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y}=0,$$

于是 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\cdot\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微。故选（B）。

【评注】本题的关键点是要掌握二元函数可微的充分条件，即

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-f_x'(0,0)\Delta x-f_y'(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0\Rightarrow z=f\left(x,y\right)\text{可微。}$$

（4）设 $I_k=\int_0^{k\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x\left(k=1,2,3\right)$，则有

（A）$I_1<I_2<I_3$　　（B）$I_3<I_2<I_1$

（C）$I_2<I_3<I_1$　　（D）$I_2<I_1<I_3$　　[　　]

【分析】本题为定积分的比较。题中 I_1,I_2,I_3 的被积函数相同，积分区间不同，但 $\left[0,\pi\right]\subset\left[0,2\pi\right]\subset\left[0,3\pi\right]$，所以较易想到利用定积分对区间的可加性处理后，再利用定积分的比较定理。

【详解】当 $\pi<x<2\pi$ 时，$\mathrm{e}^{x^2}\sin x<0\Rightarrow\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x<0$，

所以 $I_2=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x=I_1+\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x<I_1$，

又 $I_3=\int_0^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x=I_1+\int_{\pi}^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x$，

而 $\int_{\pi}^{3\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\mathrm{d}x>\int_{\pi}^{3\pi}\sin x\mathrm{d}x=0$，

所以 $I_1<I_3$，故 $I_2<I_1<I_3$，即选（D）

【评注】定积分的比较定理在考研数学的选择题中多次出现，考生需熟练掌握。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第 5 讲【例 2】.

（5）设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}0\\0\\c_1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\c_2\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\c_3\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}-1\\1\\c_4\end{bmatrix}$，其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$　（C）$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　（D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$　[　　]

【分析】本题判断三个三维向量是否线性相关，可利用定义或向量组的行列式是否为零来判断。

【详解】$\left(c_3+c_4\right)\alpha_1-c_1\alpha_3-c_1\alpha_4=0$，所以 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，故选（C）。

【评注】本题也可用行列式求解。因为各选项中皆有三个向量，而向量均是三维，所以若向量组的行列式为零，则该向量组线性相关。

（A）　选项，$\left|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}0&1\\1&-1\end{vmatrix}=-c_1$，

（B） 选项，$\left|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4\right| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix} = c_1$，

（C） 选项，$\left|\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ c_1 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = c_1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$，

（D）选项，$\left|\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ c_2 & c_3 & c_3+c_4 \end{vmatrix} = -\left(c_3+c_4\right)$，

综上，因为c_1,c_2,c_3,c_4为任意常数，只有（C）选项中的向量组的行列式确定为零，即$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，故选（C）。

类似例题见《文登暑期讲义》（线性代数）第 3 讲【例 1】 【例 7】.

（6） 设A为 3 阶矩阵，P为 3 阶可逆矩阵，且$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，若$P = \left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$，$Q = \left(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3\right)$，则$Q^{-1}AQ =$

（A）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ （B）$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ （C）$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ （D）$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ [ ]

【分析】本题实质考查矩阵的相似对角化。对可对角化矩阵A来讲，只要找到属于特征值λ_i线性无关的特征向量$\xi_{i1},\xi_{i2},\cdots,\xi_{ir_i}$，令$P = \left[\xi_{11},\xi_{12},\cdots,\xi_{1r_1},\cdots,\xi_{k1},\xi_{k2},\cdots,\xi_{kr_k}\right]$，则有

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_k & \\ & & & & \lambda_k \end{bmatrix}。$$

【详解】由题设可知，矩阵A的特征值为 1，1，2，且

α_1,α_2是属于 1 的特征向量，且α_1,α_2线性无关，于是属于 1 的特征向量为

$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$（$k_1,k_2$不全为零）；

α_3是属于特征值 2 的特征向量。

题中$Q=\left(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3\right)$，

而$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2$是属于 1 的特征向量，$\alpha_3$是属于特征值 2 的特征向量，且

$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以

$$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}。$$

故选（B）。

【评注】本题出题形式较新颖，全面考查了可对角化矩阵与其特征值所组成的对角矩阵的关系。本题还可利用矩阵的乘法求解。

$$Q=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=PB,$$

所以$Q^{-1}AQ=\left(PB\right)^{-1}APB=B^{-1}P^{-1}APB=B^{-1}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}B$，

而$B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，

所以$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$。

故选（B）。

显然第一种解法要简洁许多。

（7）设随机变量X与Y相互独立，且分别服从参数为 1 和 4 的指数分布，则$P\left\{X<Y\right\}=$

（A）$\dfrac{1}{5}$ （B）$\dfrac{1}{3}$ （C）$\dfrac{2}{5}$ （D）$\dfrac{4}{5}$ [ ]

【分析】本题求随机事件的概率。由于给出了边缘分布，结合随机变量X与Y相互独立的条件可直接得到$\left(X,Y\right)$的联合概率密度$f\left(x,y\right)$，然后计算二重积分$P\left\{X<Y\right\}=\iint\limits_{x<y}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$即可。

【详解】由题设可知，X 与 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}, f_Y(y)=\begin{cases} 4e^{-4y}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases},$$

又 X 与 Y 相互独立，所以 X 与 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases} 4e^{-x-4y}, & x>0,y>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

所以

$$P\{X<Y\}=\iint\limits_{x<y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} e^{-x-4y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty} e^{-4y}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(-e^{-4y}\right)\Big|_x^{+\infty}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty} e^{-5x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{5}e^{-5x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{5}。$$

故选(A).

【评注】本题中利用了以下结论：

$$X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立} \Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)。$$

类似例题见《文登暑期讲义》（概率论与数理统计）第 3 讲【例 6】.

（8）将长度为 1m 的木棒随机地截成两半，则两段长度的相关系数为

（A） 1 （B）$\frac{1}{2}$ （C）$-\frac{1}{2}$ （D）-1 [ ]

【分析】本题求两个随机变量 X,Y 的相关系数。题设中 $X+Y=1$，即 X,Y 存在线性关系，可由此迅速得出答案。

【详解】设两段长度分别为 X,Y，则有 $X+Y=1$，即 $Y=-X+1$，

所以 X 与 Y 存在线性关系，且为负相关，所以 $\rho_{XY}=-1$，故选（D）。

【评注】本题中若按常规方法计算 ρ_{XY}，则化简为繁了。

完全类似例题见《文登暑期讲义》（概率论与数理统计）第 4 讲【例 6】.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上.

（9）若函数 $f(x)$ 满足关系 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$，则

$f(x)=$ _________.

【分析】由于所求的函数 $f(x)$ 需同时满足两个微分方程，可先求出第一个微分方程的通解，然后代入第二个方程求出参数即可。

【详解】 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 的特征方程为

$$\lambda^2+\lambda-2=0\Rightarrow\lambda_1=-2,\lambda_2=1,$$

所以 $f(x)=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^x$， $f'(x)=-2C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^x, f''(x)=4C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^x$，

将以上两式代入 $f''(x)+f(x)=2\mathrm{e}^x$ 可得

$$f''(x)+f(x)=5C_1\mathrm{e}^{-2x}+2C_2\mathrm{e}^x=2\mathrm{e}^x\Rightarrow C_1=0,C_2=1,$$

故 $f(x)=\mathrm{e}^x$。

【评注】本题中第一个方程为齐次方程，通解求解相对容易一些。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第 8 讲【例 10】 【例 11】.

（10）$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=$__________.

【分析】本题求定积分。由于含根式，可先作变量代换，然后再求解。

【详解】 $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x$

$$\overset{x-1=t}{=}\int_{-1}^1(t+1)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=\int_{-1}^1 t\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t+\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$$

$$=0+2\int_0^1\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}。$$

【评注】计算定积分时，要想到奇偶函数在对称区间的性质。

本题中 $\int_{-1}^1 t\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=0,\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=2\int_0^1\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$，

该步利用了结论：奇函数在对称区间的积分为零。

此外，还利用了结论：$\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi a^2}{4}$。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第 5 讲【例 13】.

（11）$\mathrm{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=$__________.

【分析】本题求多元函数在某点的梯度，直接利用梯度公式：

$$\mathrm{grad}u(x,y,z)\big|_{(x,y,z)}=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(x,y,z)}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(x,y,z)}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(x,y,z)}\vec{k}。$$

【详解】 $\mathrm{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}$

$$=\frac{\partial\left(xy+\dfrac{z}{y}\right)}{\partial x}\Bigg|_{(2,1,1)}\vec{i}+\frac{\partial\left(xy+\dfrac{z}{y}\right)}{\partial y}\Bigg|_{(2,1,1)}\vec{j}+\frac{\partial\left(xy+\dfrac{z}{y}\right)}{\partial z}\Bigg|_{(2,1,1)}\vec{k}$$

$$=y\Big|_{(2,1,1)}\vec{i}+\left(x-\frac{z}{y^2}\right)\Bigg|_{(2,1,1)}\vec{j}+\frac{1}{y}\Bigg|_{(2,1,1)}\vec{k}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}=\{1,1,1\}$$

【评注】考生需熟记梯度、方向导数、旋度、散度的计算公式。

（12）设$\Sigma=\left\{(x,y,z)\,|\,x+y+z=1,x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0\right\}$，则$\iint\limits_{\Sigma}y^2\mathrm{dS}=$________

【分析】本题求对面积的曲面积分，可将其化为投影域上的二重积分计算，而被积函数只含y^2，所以可考虑将积分曲面在xOy或yOz平面投影。

【详解】曲面函数$z=1-x-y$，则

$$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3},$$

且$\Sigma=\left\{(x,y,z)\,|\,x+y+z\leq 1,x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0\right\}$在$xOy$面的投影区域为

$D=\left\{(x,y)\,|\,x+y\leq 1,x\geq 0,y\geq 0\right\}$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma}y^2\mathrm{dS}=\iint\limits_{D}y^2\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x y^2\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{12}.$$

【评注】本题为基础题型。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第12讲【例11】.

（13）设α为3维单位向量，E为三阶单位矩阵，则矩阵$E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$的秩为________ .

【分析】本题中α可选一符合题目要求的特例：$\alpha=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，求出$E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$后可得其秩。

【详解】令$\alpha=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，则

$$E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

则 $r\left(E-xx^{\mathrm{T}}\right)=r\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=2$。

【评注】对于抽象函数，用赋值法可快速得到答案。

类似例题见《文登暑期讲义》（线性代数）第 3 讲【例 8】.

（14）设 A,B,C 为随机事件，A 与 C 互不相容，且 $P(AB)=\frac{1}{2},P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P\left(AB\,|\,\overline{C}\right)=$__________ .

【分析】本题求条件概率，题设中还涉及不相容的概念，利用概率的性质和相关结论求解。

【详解】 由于 A 与 C 互不相容，所以 $P(AC)=0$，而 $ABC\subset AC$，所以 $P(ABC)=0$，于是

$$P\left(AB\,|\,\overline{C}\right)=\frac{P\left(AB\overline{C}\right)}{P\left(\overline{C}\right)}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

【评注】本题中直接利用了结论：

$$P\left(AB\overline{C}\right)=P(AB)-P(ABC),P\left(\overline{C}\right)=1-P(C)。$$

类似例题见《文登暑期讲义》（概率论与数理统计）第 1 讲【例 2】 【例 3】.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15） **(**本题满分 10 分)

证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2}\left(-1<x<1\right)$。

【分析】本题证明不等式，可移项作辅助函数，然后利用函数的单调增减性并结合最值求解。

【详解】将不等式等价变形为 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\geq 0$，

作辅助函数

$$F(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}，\ F(0)=0$$

则

$$F'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x，$$

令 $F'(x)=0$，得驻点 $x=0$，又 $F''(0)=\left[\frac{4}{(1-x^2)^2}-\cos x-1\right]\Big|_{x=0}=2>0$，

所以 $x=0$ 为 $F(x)$ 在 $(-1,1)$ 内的唯一极小值点，于是 $x=0$ 为 $F(x)$ 在 $(-1,1)$ 内的最小值点，即 $F(x)\ge F(0)=0$，故对任意 $x\in(-1,1)$，有

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\ge 0，即\ x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\frac{x^2}{2}。$$

【评注】函数不等式的证明一般均需作辅助函数，并结合函数的单调增减性证明。其中“$x=0$ 为 $F(x)$ 在 $(-1,1)$ 内的最小值点”也可如下求解：

$$F''(x)=\frac{4}{(1-x^2)^2}-\cos x-1$$

当 $-1<x<1$ 时，$F''(x)=\frac{4}{(1-x^2)^2}-(\cos x+1)\ge 4-2>0$。

所以 $F'(x)$ 单调增加。

（1）当 $0<x<1$ 时，有 $F'(x)>F'(0)=0$，

（2）当 $-1<x\le 0$ 时，有 $F'(x)<F'(0)=0$，

于是 $F(0)=0$ 是函数 $F(x)$ 在 $(-1,1)$ 内的最小值。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第 7 讲【例 13】.

（16） **(**本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值。

【分析】本题求二元函数的极值，先利用必要条件求出可能的极值点，然后利用取极值的充分条件进行判断。

【详解】$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}-x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=\left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=-xy\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm1\\ y=0\end{cases}$，

于是可能的极值点为

$$(1,0,),(-1,0)$$

又

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-x\left(3-x^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-y\left(1-x^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-x\left(1-y^2\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

于是 $A\Big|_{(1,0)}=-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}<0,B\Big|_{(1,0)}=0,C\Big|_{(1,0)}=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},B^2-AC=-2\mathrm{e}^{-1}<0$，

所以 $(1,0)$ 为极大值，且极大值为 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，

$$A\Big|_{(-1,0)}=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}>0,B\Big|_{(-1,0)}=0,C\Big|_{(-1,0)}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},B^2-AC=-2\mathrm{e}^{-1}<0,$$

所以 $(-1,0)$ 为极小值，且极小值为 $-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$

【评注】二元函数的极值为基本题型，需熟练掌握。

具体解法见《文登暑期讲义》（高等数学）第 9 讲（无条件极值的求法）及【例 17】。

（17） (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域与和函数。

【分析】本题求幂级数的收敛域与和函数。因为幂级数缺项，所以求收敛区间须利用函数项级数求收敛域的方法。又 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2}{2n+1}x^{2n}$，可先分别求出两个级数的和函数，再将其相加即可。

【详解】$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{2(n+1)+1}x^{2(n+1)}}{\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}}\right|=\left|x^2\right|<1\Rightarrow|x|<1$，

所以该幂级数的收敛区间为 $(-1,1)$。

在端点 $x=\pm1$，幂级数均为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4n^2+4n+3}{2n+1}$，该级数发散。

故幂级数的收敛域为 $(-1,1)$。

当 $x\in(-1,1)$ 时，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2+2}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n},$$

其中 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(2n+1)x^{2n}\mathrm{d}x\right)'$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}=\frac{2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}=\frac{2}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right)'\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{x}\int_0^x\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x},\quad 0<|x|<1,$$

又 $S(0)=3$，所以和函数

$$S(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2}+\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & 0<|x|<1\\ 3, & x=0\end{cases}。$$

【评注】本题求和函数时先将级数分解为两个级数的和，然后利用逐项微分、积分将通项中除了以 n 为指数幂 $2^n,3^n,\cdots$ 及阶乘：$n!$，$(2n)!$，$(2n+1)!$ 之外的与 n 相关的系数全部搞掉，使其成为七个展开式中通项的一种形式（注意，若要去掉的因子在分子上，则通过逐项积分法；要去掉的因子在分母上，则通过逐项微分法），然后写出对应的和函数；作与第一步相反的分析运算，便得原幂级数的和函数.

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第 11 讲【例 16】及【Ex1】.

（18）（本题满分 10 分）

已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t)\\ y=\cos t\end{cases}\left(0\le t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，其中函数 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(t)>0\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$。若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1，求函数 $f(x)$ 的表达式，并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积。

【分析】本题求函数方程和平面无界区域的面积，需要先根据题设条件建立微分方程，求出函数表达式，然后利用定积分求面积。

【详解】 曲线L在任一点$(x,y)=\left(f(t),\cos t\right)$的导数为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\sin t}{f'(t)}$，

于是过该点的切线方程为

$$Y-\cos t=-\frac{\sin t}{f'(t)}\left(X-f(t)\right)。$$

令$Y=0\Rightarrow X=f(t)+\cot tf'(t)$。

又曲线L的切线与x轴的交点到切点的距离恒为1，即

$$d=\sqrt{\left(f(t)-f(t)-\cot tf'(t)\right)^2+\cos^2 t}=1，$$

则$\cot^2 tf'^2(t)+\cos^2 t=1\Rightarrow f'^2(t)=\dfrac{\sin^2 t}{\cot^2 t}$，又$f'(t)>0\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以$f'(t)=\dfrac{\sin t}{\cot t}=\dfrac{\sin^2 t}{\cos t}=\sec t-\cos t$，

于是$f(x)-f(0)=\int_0^x(\sec t-\cos t)\mathrm{d}t=\ln|\sec x+\tan x|-\sin x$，又$f(0)=0$。

即$f(x)=\ln|\sec x+\tan x|-\sin x$。

曲线L与x轴和y轴的无边界区域的面积为

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}y\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos tf'(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\frac{\sin t}{\cot t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\quad。$$

【评注】本题为微分方程在几何上的综合应用题，涉及了切线，参数方程求导，微分方程，平面图形的面积等若干知识点。

（19） (本题满分 11 分)

已知L是第一象限中从点$(0,0)$沿圆周$x^2+y^2=2x$到点$(2,0)$，再沿圆周$x^2+y^2=4$到点$(0,2)$的曲线段，计算曲线积分$\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+\left(x^3+x-2y\right)\mathrm{d}y$。

【分析】本题计算对坐标的曲线积分，可先添加一线段L_1，使得$L+L_1$组成闭曲线，然后利用格林公式求解。

【详解】添加由点$(0,2)$到点$(0,0)$的线段L_1，则$L+L_1$组成闭曲线，且方向为逆时针。

且$\int_L\ =\oint_{L+L_1}\ -\int_{L_1}$

题设中 $P=3x^2y,Q=x^3+x-2y$，则 $\frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2+1,\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2$。

所以由格林公式可得

$$\oint_{L+L_1}3x^2y\mathrm{d}x+\left(x^3+x-2y\right)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\ ,$$

又 $\int_{L_1}3x^2y\mathrm{d}x+\left(x^3+x-2y\right)\mathrm{d}y=\int_2^0-2y\mathrm{d}y=4$，

于是 $\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+\left(x^3+x-2y\right)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}-4$。

【评注】对坐标的曲线积分，一般利用格林公式计算，但要注意格林公式的应用条件。

类似例题见《文登暑期讲义》（高等数学）第 12 讲【例 7】.

（20） **(**本题满分 11 分)

设 $A=\begin{bmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{bmatrix}$， $\beta=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$，

（Ⅰ）计算行列式 $|A|$；

（Ⅱ）当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，并求其通解。

【分析】（Ⅰ）由于每行中零元素均有两个，可按行（或列）展开求解。

（Ⅱ）方程组 $Ax=\beta$ 若有无穷多解，则 $r(A)=r(A\,|\,\beta)<4$，可利用初等行变换求 a。

【详解】（Ⅰ） $|A|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4$。

（Ⅱ）令 $|A|=1-a^4=0\Rightarrow a=\pm1$。

当 $a=1$ 时，

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&1\\0&1&1&0&-1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&0&-2\end{array}\right],$$

则 $r(A)=3,r\left(\overline{A}\right)=4$，方程无解。

当 $a=-1$ 时，

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\-1&0&0&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right],$$

则$r\left(A\right)=3=r\left(\overline{A}\right)<4$，方程组有无穷多组解。

由上可得，方程组与下面的方程组同解。

$$\begin{cases}x_1-x_4=0\\x_2-x_4=-1\\x_3-x_4=0\end{cases}$$，令 $x_4=k$，则方程组的通解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\\-1+k\\k\\k\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\0\end{bmatrix}$$，其中k为任意常数。

【评注】非齐次线性方程组的解的判定和求解是线性代数的核心内容，需熟练掌握。

类似例题见《文登暑期讲义》（线性代数）第 4 讲【例 7】.

（21） **(**本题满分 11 分)

已知$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}$，二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x^{\mathrm{T}}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)x$ 的秩为 2，

（Ⅰ）求实数a的值；

（Ⅱ）求正交变换 $x=Qy$，将 f 化为标准形。

【分析】（Ⅰ）由 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x^{\mathrm{T}}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)x$ 的秩为 2 可得$r\left(A^{\mathrm{T}}A\right)=2$，即有$\left|A^{\mathrm{T}}A\right|=0$，从而可求出$a$；

（Ⅱ）求出$A^{\mathrm{T}}A$的三个正交的单位特征向量，令其组成的矩阵为Q。

【详解】题设中已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x^{\mathrm{T}}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)x$ 的秩为 2，则$r\left(A^{\mathrm{T}}A\right)=2$。

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&a\\1&1&a&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&1-a\\0&1+a^2&1-a\\1-a&1-a&3+a^2\end{bmatrix},$$

所以$\begin{vmatrix}2&0&1-a\\0&1+a^2&1-a\\1-a&1-a&3+a^2\end{vmatrix}=0$，即

$$2\left[\left(1+a^2\right)\left(3+a^2\right)-\left(1-a\right)^2\right]-\left(1-a\right)^2\left(1+a^2\right)=0$$

$$\Rightarrow\left(3+a^2\right)\left(a+1\right)^2=0\Rightarrow a=-1。$$

（Ⅱ）当$a=-1$时，

$A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{bmatrix}$，其特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\2-\lambda&\lambda-2&0\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=\left(\lambda-2\right)\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\-1&1&0\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\left(\lambda-2\right)\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&1&0\\-4&-2&\lambda-4\end{vmatrix}$$

$$=\lambda\left(\lambda-2\right)\left(\lambda-6\right),$$

令上式$=0$，得$\lambda_1=0,\lambda_2=2,\lambda_3=6$。

易解得$\left(0E-AA^{\mathrm{T}}\right)x=0$的基础解系为 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$，

易解得$\left(2E-AA^{\mathrm{T}}\right)x=0$的基础解系为 $\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$，

易解得$\left(6E-AA^{\mathrm{T}}\right)x=0$的基础解系为$\alpha_3=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$，

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$属于不同特征值的特征向量，已正交，我们只需将其标准化即可，

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{\alpha_1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}，\ \beta_2=\frac{\alpha_2}{|\alpha_2|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}，\ \beta_3=\frac{\alpha_3}{|\alpha_3|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}。$$

令$Q=\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)$，则 $f=2y_2^2+6y_3^2$。

【评注】本题关键是求出二次型对应矩阵的特征值及对应的特征向量。熟记某些常见结论对解题非常有帮助，如本题（Ⅰ）中，

由于$r\left(A\right)=r\left(A^{\mathrm{T}}A\right)=2$，而

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

所以当$a=-1$时，$r\left(A\right)=2$。

完全类似例题见《文登暑期讲义》（线性代数）第 6 讲【例 4】.

（22） **(**本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量$\left(X,Y\right)$的概率分布为

X \ Y	**0**	**1**	**2**
0	$\frac{1}{4}$	**0**	$\frac{1}{4}$
1	**0**	$\frac{1}{3}$	**0**
2	$\frac{1}{12}$	**0**	$\frac{1}{12}$

（Ⅰ）求$P\left\{X=2Y\right\}$；

（Ⅱ）求$\operatorname{cov}\left(X-Y,Y\right)$。

【分析】（Ⅰ）对离散型,求随机事件的概率时,只要将满足随机事件的概率相加即可,所以$P\left\{X=2Y\right\}=P\left\{X=0,Y=0\right\}+P\left\{X=2,Y=1\right\}$；

（Ⅱ）$\operatorname{cov}\left(X-Y,Y\right)=\operatorname{cov}\left(X,Y\right)-\operatorname{cov}\left(Y,Y\right)=EXY-EXEY-DY$，需先求出边缘分布律，继而利用定义和公式求得$EXY,EX,EY,DY$，代入上式即得。

【详解】（Ⅰ）$P\left\{X=2Y\right\}=P\left\{X=0,Y=0\right\}+P\left\{X=2,Y=1\right\}=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$；

（Ⅱ）$\operatorname{cov}\left(X-Y,Y\right)=\operatorname{cov}\left(X,Y\right)-\operatorname{cov}\left(Y,Y\right)$。

由$\left(X,Y\right)$的概率分布可得$\left(X,Y\right)$的边缘分布为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

于是$EX=\frac{2}{3},EY=1,EX^2=1,EY^2=\frac{5}{3}$， $EXY=\frac{2}{3}$,

所以$\operatorname{cov}\left(X,Y\right)=EXY-EXEY=0,\operatorname{cov}\left(Y,Y\right)=DY=EY^2-\left(EY\right)^2=\frac{2}{3}$,

$$\operatorname{cov}\left(X-Y,Y\right)=0-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}。$$

【评注】本题为基础题型.

（23） **(**本题满分 11 分)

设随机变量 X 和 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 和 $N\left(\mu,2\sigma^2\right)$，其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$。设 $Z=X-Y$，

（Ⅰ）求 Z 的概率密度；

（Ⅱ）设 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 是来自 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\widehat{\sigma}^2$；

（Ⅲ）证明 $\widehat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量 。

【分析】（Ⅰ）利用两个独立的正态分布的和或差仍为正态分布；

（Ⅱ）利用常规方法：写出似然函数 L，取对数 $\ln L$，令 $\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\sigma^2}=0$ 可得；

（Ⅲ）只要证明 $E\widehat{\sigma}^2=\sigma^2$ 即可。

【详解】（Ⅰ）因为 X 和 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 和 $N\left(\mu,2\sigma^2\right)$，

$Z=X-Y$，则 Z 服从正态分布，因为 $EZ=EX-EY=0,DZ=DX+DY=3\sigma^2$，

所以 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3\sigma^2}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot 3\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}。$$

（Ⅱ）设 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 为 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 的样本观察值，

似然函数为

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f_Z(z_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}e^{-\frac{z_i^2}{6\sigma^2}}=\frac{1}{(6\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i^2}{6\sigma^2}},$$

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln(6\pi)--\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i^2}{6\sigma^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{6(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2=0\Rightarrow\widehat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2,$$

故 σ^2 的最大似然估计量 $\widehat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$ 。

（Ⅲ）因为 $E\widehat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}EZ_i^2=\frac{1}{3n}\cdot n(0+3\sigma^2)=\sigma^2$，所以 $\widehat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量 。

【评注】本题中（Ⅰ）问中求 $Z=X-Y$ 的概率密度，也可以按一般方法先求出 (X,Y) 的联合概率分布，然后利用定义求 $F_Z(z)=P\{Z<z\}=P\{X-Y<z\}$，求导可得 $F_Z'(z)=f_z(z)$ 。显然这种解法比较繁琐。所以记住常用结论既可以节约宝贵的考试时间，又可以快速准确地得到答案。

类似例题见《文登暑期讲义》（概率论与数理统计）第 6 讲【例 6】 【例 7】。