报考单位＿＿＿＿ 考生姓名＿＿＿＿ 考生编号＿＿＿＿

密封线内不要答题

# 2011 年考研数学(二)试题

**考生注意事项**

**1. 答题前，考生须在答题纸指定位置上填写考生姓名、报考单位和考生编号。**

**2. 答案必须书写在答题纸指定位置的边框区域内，写在其他地方无效。**

**3. 填(书)写必须使用蓝(黑)色字迹钢笔、圆珠笔或签字笔。**

**4. 考试结束，将答题纸和试题一并装入试题袋中交回。**

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

**一、选择题(1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在题后括号内)**

(1) 已知当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 $cx^k$ 是等价无穷小，则

(A) $k = 1, c = 4$.　　(B) $k = 1, c = -4$.

(C) $k = 3, c = 4$.　　(D) $k = 3, c = -4$.　　【　】

(2) 已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导，且 $f(0) = 0$，则 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$

(A) $-2f'(0)$.　　(B) $-f'(0)$.　　(C) $f'(0)$.　　(D) 0.　　【　】

(3) 函数 $f(x) = \ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.　　【　】

(4) 微分方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x} (\lambda > 0)$ 的特解形式为

(A) $a(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$.　　(B) $ax(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$.

(C) $x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$.　　(D) $x^2(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$.　　【　】

(5) 设函数 $f(x), g(x)$ 均有二阶连续导数，满足 $f(0) > 0, g(0) < 0$，且 $f'(0) =$

| 题号 | 一 | 二 | 三 | | | | | | | | | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | |
| 得分 | | | | | | | | | | | | |
| 评卷人 | | | | | | | | | | | | |

$g'(0)=0$，则函数 $z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是

(A) $f''(0)<0, g''(0)>0$.　　(B) $f''(0)<0, g''(0)<0$.

(C) $f''(0)>0, g''(0)>0$.　　(D) $f''(0)>0, g''(0)<0$.　　【　　】

(6) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx, J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx, K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx$，则 $I,J,K$ 的大小关系为

(A) $I<J<K$.　(B) $I<K<J$.　(C) $J<I<K$.　(D) $K<J<I$.　【　　】

(7) 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第二列加到第一列得矩阵 $\boldsymbol{B}$，再交换 $\boldsymbol{B}$ 的第二行与第三行得到单位矩阵，记 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=$

(A) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　(B) $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2$.　(C) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$.　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}$.　【　　】

(8) 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是四阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可为

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$.　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$.　(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.　【　　】

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

**二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在题中横线上）**

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________.

(10) 微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$ ________.

(11) 曲线 $y=\int_0^x\tan t\,dt\ (0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4})$ 的弧长 $s=$ ________.

(12) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$，$\lambda>0$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=$ ________.

(13) 设平面区域 $D$ 由直线 $y=x$，圆 $x^2+y^2=2y$ 及 $y$ 轴所组成，则二重积分 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$ $=$ ________.

(14) 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，则 $f$ 的正惯性指数为________.

**三、解答题(15 ～ 23 小题，共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)**

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

(15)(本题满分 10 分)

已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^\alpha}$，设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$，试求 $\alpha$ 的取值范围.

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

(16)(本题满分 11 分)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}t^3+t+\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t+\dfrac{1}{3} \end{cases}$ 确定，求 $y=y(x)$ 的极值和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 $f$ 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

报考单位________ 考生姓名________ 考生编号________

密 封 线 内 不 要 答 题

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 具有二阶导数，且曲线 $l: y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切于原点，记 $\alpha$ 为曲线 $l$ 在点 $(x,y)$ 处切线的倾角，若 $\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，求 $y(x)$ 的表达式.

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

(19)(本题满分 10 分)

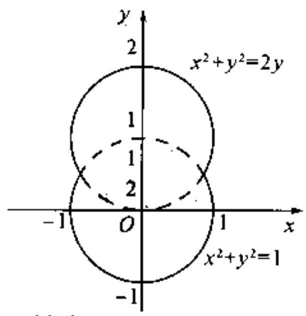
(Ⅰ)证明：对任意的正整数 $n$，都有 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$ 成立.

(Ⅱ)设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

(20)(本题满分 11 分)

一容器的内侧是由图中曲线绕 $y$ 轴旋转一周而成的曲面，该曲线由 $x^2+y^2=2y\left(y\geqslant\frac{1}{2}\right)$ 与 $x^2+y^2=1\left(y\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 连接而成的.




(Ⅰ)求容器的容积；

(Ⅱ)若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出，至少需要做多少功?(长度单位：m，重力加速度为 $g\,\mathrm{m/s^2}$，水的密度为 $10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.

| 得分 | 评卷人 |
|---|---|
| | |

(21)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0, f(x,1)=0$，

$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，

计算二重积分 $I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

(22)(本题满分 11 分)

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,5)^T$,不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,1)^T,\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3)^T,\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,a)^T$ 线性表示.

(Ⅰ)求 $a$ 的值;

(Ⅱ)将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

| 得分 | 评卷人 |
| --- | --- |
| | |

(23)(本题满分 11 分)

设 $A$ 为三阶实对称矩阵，$A$ 的秩为 2 且 $A\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ) 求 $A$ 的所有特征值与特征向量；

(Ⅱ) 求矩阵 $A$.

密 封 线 内 不 要 答 题

# 2011 年考研数学(二)
# 试题分析、详解及评注

**一、选择题**

(1) **应选(C)**

**【分析】**此题利用等价无穷小的知识，通过洛比达法则求极限的方法求解.

**【详解】**由题意，$f(x)$ 与 $cx^k$ 是等价无穷小，由等价无穷小的定义，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}\xlongequal{\text{洛比达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{3\cos x-3\cos 3x}{ckx^{k-1}}\xlongequal{\text{洛比达}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3\sin x+9\sin 3x}{ck(k-1)x^{k-2}}\xlongequal{\text{洛比达}}\lim_{x\to 0}\frac{-3\cos x+27\cos 3x}{ck(k-1)(k-2)x^{k-3}}=\frac{24}{ck(k-1)(k-2)x^{k-3}}=1.$$

从而 $k=3, ck(k-1)(k-2)=24$；即 $k=3, c=4$，故选 C.

**【评注】**此题考查等价无穷小的有关知识，属基本本题型. 求 $\frac{0}{0}$ 型极限，首先可考虑是否可以应用洛比达法则计算. 完全类似题型可参见《考研数学复习指南》(理工类，2012 版)$P_{30}$，例【1.60】.

(2) **应选(B)**

**【分析】**利用导数的定义求极限，对函数进行变形，用加一项减一项的方式凑出函数在零点的导数的定义，进而解得极限.

**【详解】**$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2f(x)-x^2f(0)+2f(0)-2f(x^3)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)-f(0)}{x^3}$$

$$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)$$

故 B 项入选.

**【评注】**此题考查导数的定义，通过适当的变形，凑出 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的导数的定义形式求解. 此题要求熟练灵活地掌握导数的定义.

(3) **应选(C)**

**【分析】**此题要求函数的驻点，利用驻点的定义求解.

**【详解】**$f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$

$$=\ln|x-1|+\ln|x-2|+\ln|x-3|$$

利用求导公式有

$$f'(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$$

$$=\frac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

令　$f'(x)=0$ 得，　$3x^2-12x+11=0$.

而此一元二次方程的判别式　$\Delta=144-12\times 11>0$，从而方程有两个根，即 $f(x)$ 有两个驻点.

**【评注】**此题要求函数的驻点，考查驻点的定义：驻点，即为导数等于零的点. 先求出导函数，进而求导函数的零点即可. 属基本本题型.

(4) **应选(C)**

**【分析】**此题要求二阶常系数线性非齐次方程的特解，首先分解常数项，然后利用公式直接求取.

**【详解】**微分方程对应的齐次方程的特征方程为

$$r^2-\lambda^2=0, \text{解为 } r_1=\lambda, r_2=-\lambda.$$

从而方程 $y''-\lambda^2 y=e^{\lambda x}$ 的特解为　$y_1^*=Cxe^{\lambda x}C_1$，

$y''-\lambda^2 y=e^{-\lambda x}$ 的特解为　$y_2^*=Cxe^{-\lambda x}C_2$，

因此原微分方程的特解形式为　$y^*=y_1^*+y_2^*=x(C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x})$.

故 C 项入选.

**【评注】**此题考查二阶常系数线性非齐次方程的可加性和求解公式，具体求解公式可参见《考研数学复习指南》(理工类，2012 版)$P_{152}$ 表 6-2，类似题型可见《考研数学复习指南》(理工类，2012 版)$P_{165}$，例【6.16】.

(5) **应选**(A)

**【分析】**利用二阶连续可偏导二元函数取极小值的充分条件求解.

**【详解】**由题意知，函数 $z=f(x)g(y)$ 具有二阶连续偏导数.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(x)g(y), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'(x)g'(y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x)g(y), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f(x)g''(y).$$

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0,0)}=g(0)f''(0), B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=f'(0)g'(0)=0.$$

$$C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0,0)}=f(0)g''(0).$$

从而由二元函数取极小值的充要条件有：　$B^2-AC<0$ 且 $A>0$，

因此　$g(0)f''(0)>0, f(0)g''(0)>0$，由 $f(0)>0, g(0)<0$ 得

$f''(0)<0, g''(0)>0$，

故 A 项选入.

**【评注】**此题为基本题型，已多次出现在历年考研数学考题中，对具有连续二阶偏导数的二元函数，取极小值的充分条件为 $AC-B^2>0$ 且 $A>0$，取极大值的充分条件为 $AC-B^2>0$ 且 $A<0$. 求无条件极值的方法及类似题型可参见《考研数学复习指南》(理工类，2012 版)$P_{281}$，题型六.

(6) **应选**(B)

**【分析】**利用定积分的性质直接比较被积函数在积分区域上的大小即可.

**【详解】**在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上，$\sin x<\cos x<1<\cot x$，从而

$$\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x,$$

从而 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,dx$.

故 B 项入选.

**【评注】**此题考查定积分的比较定理(见《考研数学复习指南》(理工类，2012 版)$P_{92}$ 基本性质(7))，类似题目可参见《考研数学复习指南》(理工类，2012 版)$P_{94}$ 例【4.2】.

(7) **应选**(D)

**【分析】**本题可直接利用矩阵初等变换的知识求解，左乘变行，右乘变列.

**【详解】**由题意有

$$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{E}\Rightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}.$$

故 D 项入选.

【评注】此题考查矩阵初等变换和逆矩阵的基本知识，属基本题型，注意左乘变行，右乘变列，类似题目可参见《考研数学复习指南》(理工类，2012 版)$P_{389}$ 例【2.6】.

(8) 应选(D)

【分析】利用矩阵的伴随矩阵的性质和方程组基础解系的知识求解.

【详解】由伴随矩阵性质有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

又因为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$，从而 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$

即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 都为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

又因为 $r(\boldsymbol{A})=3$. 从而 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，从而 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的秩为 3.

而由条件 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$ 知，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

从而，$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

由以上分析知(D) 项入选.

【评注】本题考查伴随矩阵和向量组相关性以及方程组基础解系的有关知识，为基础题型. 完全类似题目见《考研数学复习指南》(理工类，2012 版)$P_{402}$ 例【2.35】.

二、填空题

(9) 应填$\sqrt{2}$

【分析】利用重要极限$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 求解此 $1^\infty$ 型极限.

【详解】$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{\frac{\frac{2^x-1}{2}}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1}{2x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln2}-1}{2x}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x\ln2}{2x}}=\mathrm{e}^{\frac{\ln2}{2}}=\sqrt{2}.$$

【评注】此题考查了$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 这个重要极限的应用. 一般地，设 $\lim u(x)=1,\lim v(x)=\infty$，且 $\lim[u(x)-1]v(x)$ 存在，则 $\lim[u(x)]^{v(x)}=\mathrm{e}^{\lim[u(x)-1]v(x)}$. 此题属基本题型，类似题目可参见《考研数学复习指南》(理工类，2012 版)$P_{16}$ 例【1.27】和例【1.28】.

(10) 应填 $\mathrm{e}^{-x}\sin x$

【分析】此题考查一阶线性微分方程求特解的方法，可利用公式直接计算.

$$y=\mathrm{e}^{-\int1\mathrm{d}x}\left(C+\int\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{e}^{\int1\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)=\mathrm{e}^{-x}(C+\sin x).$$

代入 $y(0)=0$，得 $C=0$，从而满足条件的特解为

$$y=\mathrm{e}^{-x}\sin x.$$

【评注】此题属于基本题型，一阶微分方程的计算方法和公式可参见《考研数学复习指南》(理工类，2012 版)$P_{155}$ 页表 6-5.

(11) 应填 $\ln(1+\sqrt{2})$

【分析】本题考查定积分的计算，利用求曲线弧长的公式求解.

【详解】$s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+y'(x)^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\,\mathrm{d}x$

$$=\ln|\sec x+\tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(1+\sqrt{2}).$$

【评注】本题考查求曲线弧长的基本公式，属基本题型.

(12) 应填$\frac{1}{\lambda}$

【分析】求分段函数的广义积分，利用分部积分法计算.

【详解】$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$

$$= -\int_0^{+\infty} x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\lambda x}$$

$$= -x\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

【评注】此题考查反常积分的有关知识，属基本题型，类似题目可参见《考研数学复习指南》(理工类，2012 版)$\mathrm{P}_{125}$，例【4.50】.

(13) 应填$\frac{7}{12}$

【分析】首先画出积分区域的概图，积分区域 $D$ 如图 11-1 所示，然后选用极坐标法计算即可.

【详解】$I = \iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} r^3\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}r$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^4}{4}\sin\theta\cos\theta\Big|_0^{2\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^5\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}\sin^6\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{7}{12}.$$

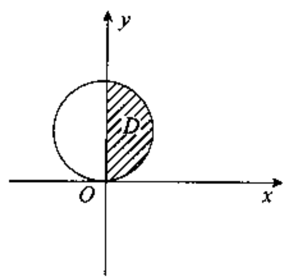


图 11-1

【评注】此题考查二重积分的计算. 属基本题型，需熟练掌握，类似题目可参见《考研数学复习指南》(理工类，2012 版)$\mathrm{P}_{302}$，例【11.10】.

(14) 应填 2

【分析】此题要求二次型的正惯性指数，首先求二次型所对应矩阵的特征根，从而判断特征根中为正的根的个数，即可得到正惯性指数.

【详解】二次型对应的对称矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, |\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \lambda & 2\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 2-\lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - (2-\lambda)(2\lambda-\lambda^2) = \lambda(1-\lambda)(4-\lambda).$$

从而得 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征根分别为 0，1，4，所以 $f$ 的正惯性指数为 2.

【评注】此题考查二次型的有关知识，属基础题目. 要求二次型的正负惯性指数，只需判断二次型的特征根的符号，重点是矩阵特征根的求取.

三、解答题

(15)【分析】利用洛比达法则和等价无穷小求$\frac{\infty}{\infty}$ 和$\frac{0}{0}$ 两种类型的极限，进而判断出 $\alpha$ 的取值范围.

【解】因为　$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^\alpha}$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2}{1+x^2}}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-1}}$$

$$= \frac{2}{\alpha(\alpha-1)}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-1}},$$

由题意 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$，得 $\alpha>1$.

又因为

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^\alpha}=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{\alpha x^{\alpha-1}}$$

$$=\frac{1}{\alpha}\lim_{x\to0^+}x^{3-\alpha},$$

由题意 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$，得 $\alpha<3$.

综上所述，　$1<\alpha<3$.

**【详注】**本题考查了 $\frac{\infty}{\infty}$ 和 $\frac{0}{0}$ 两种未定式极限的求法，还考查了变上限积分函数的求导公式．所考知识点都是常考知识点，需要熟练重点掌握．此题属于基本题型．

(16)**【分析】**首先对参数方程确定的函数求函数的一阶和二阶导数，然后求函数的驻点，和二阶导数为零的点，进而分区间判断各个子区间上导函数的符号，确定出函数的极值点和拐点．

**【解】**　令 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{t^2-1}{t^2+1}=0$ 得 $t=\pm1$.

当 $t=1$ 时，$x=\frac{5}{3}$；当 $t=-1$ 时，$x=-1$.

令 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{4t}{(t^2+1)^2}}{t^2+1}=\frac{4t}{(t^2+1)^3}=0$，得 $t=0$，即 $x=\frac{1}{3}$.

列表如下：

| $t$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,0)$ | $0$ | $(0,1)$ | $1$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,\frac{1}{3})$ | $\frac{1}{3}$ | $(\frac{1}{3},\frac{5}{3})$ | $\frac{5}{3}$ | $(\frac{5}{3},+\infty)$ |
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y''$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |

由此可知，函数 $y(x)$ 的极大值为 $y(-1)=y\big|_{t=-1}=1$，极小值为 $y(\frac{5}{3})=y\big|_{t=1}=-\frac{1}{3}$.

曲线 $y=y(x)$ 的凹区间为 $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$，凸区间为 $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$.

由于 $y\left(\frac{1}{3}\right)=y\Big|_{t=0}=\frac{1}{3}$，所以曲线 $y=y(x)$ 的拐点为 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

**【评注】**此题考查了参数方程确定的函数的求导方法，同时也考查了函数极值点和拐点的确定方法. 有关确定函数单调区间，极值最值和凹凸区间，拐点的知识点属于常考的基本知识点，不管是在客观题还是计算证明大题中，几乎每年都有涉及. 这些知识点在“高等数学”教材中都有详细叙述，请重点掌握.

(17)**【分析】**求多元复合函数的混合偏导数，注意函数 $z=f(u,v)$ 对 $x$ 和 $y$ 求偏导时，$u=xy,v=yg(x)$ 都是 $x$ 和 $y$ 的函数，使用链式法则. 注意题中条件“函数 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值”，对于可导函数 $g(x)$ 而言，这意味着 $g'(1)=0$.

**【解】** 由题意 $g'(1)=0$.

因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'_1+yg'(x)f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'_1+y[xf''_{11}+g(x)f''_{12}]+g'(x)f'_2+yg'(x)[xf''_{21}+g(x)f''_{22}],$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=f'_1(1,1)+f''_{11}(1,1)+f''_{12}(1,1)$$

**【评注】**本题考查多元复合函数二阶混合偏导的求导方法，注意分析二元函数 $z=f(u,v)$ 中中间变量 $u,v$ 是否仍为自变量 $x$ 和 $y$ 的函数，若是，需要再乘以 $u,v$ 对 $x,y$ 的偏导数. 本题中还涉及可导一元函数在某点取极值的知识点. 本题属于基本题型.

(18)**【分析】**首先利用题目中所包含的信息列出关于 $y(x)$ 的微分方程，然后通过对题目中所含条件“曲线 $l$ 与直线 $y=x$ 相切于原点”知 $y'(0)=1,y(0)=0$，这是微分方程的初始条件. 最后求满足初始条件的微分方程的特解即可.

**【解】**由于 $y'=\tan\alpha$，即 $\alpha=\arctan y'$，所以

$$\frac{d\alpha}{dx}=\frac{y''}{1+y'^2}.$$

于是有 $\frac{y''}{1+y'^2}=y'$，即

$$y''=y'(1+y'^2). \quad ①$$

令 $y'=p$，则 $y''=p'$，代入 ① 式得

$$p'=p(1+p^2),$$

分离变量得

$$\frac{dp}{p(1+p^2)}=dx,$$

两边积分得

$$\ln\frac{p^2}{1+p^2}=2x+\ln C_1. \quad ②$$

由题意 $y'(0)=1$，即当 $x=0$ 时 $p=1$，代入 ② 式得 $C_1=\frac{1}{2}$，于是有

$$y'=p=\frac{\frac{e^x}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}e^{2x}}},$$

两边积分得

$$y=\int\frac{\frac{e^t}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{e^t}{\sqrt{2}}\right)^2}}\mathrm{d}t=\arcsin\frac{e^t}{\sqrt{2}}+C_2,$$

由 $y(0)=0$ 得 $C_2=-\frac{\pi}{4}$. 所以

$$y=\arcsin\frac{e^t}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}.$$

**【评注】**本题考查了导数的几何意义，微分方程的建立和可降阶微分方程的求解等多个知识点. 只有对每个知识点熟练灵活掌握，才能从题目条件中分析出函数 $y(x)$ 和其导数之间所满足的函数关系，建立微分方程，这是本题的关键. 对于可降解微分方程的求解方法，可参见《考研数学复习指南》(理工类，2012 版)P164 题型二.

(19)**【分析】**本题(Ⅰ)是对不等式的证明，通过变形后可直接利用拉格朗日中值定理证明.(Ⅱ)以(Ⅰ)的条件为基础，利用单调有界数列必有极限的性质来证明数列 $\{a_n\}$ 收敛即可.

**【证】**(Ⅰ)根据拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(n,n+1)$，使得

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{\xi},$$

所以 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\xi}<\frac{1}{n}$.

(Ⅱ)当 $n\geqslant 1$ 时，由(Ⅰ)知

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0,$$

且

$$\begin{aligned}a_n&=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\\&>\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln n\\&=\ln(1+n)-\ln n>0,\end{aligned}$$

所以数列 $\{a_n\}$ 单调减少有下界，故 $\{a_n\}$ 收敛.

**【评注】**本题(Ⅰ)是不等式的证明. 不等式的证明方法很多，《考研数学复习指南》(理工类，2012 版)P351 第 2 节专门列出了一节将不等式的证明中常用的方法分为六大类进行了汇总和详解. 考生可根据题目特点，灵活选取.

数列收敛的证明方法也有多种，用单调有界数列必有极限这个定理来证明数列收敛是最容易用也是最常用的方法，需重点掌握.

(20)**【分析】**(Ⅰ)求一曲线绕坐标轴旋转而成的旋转体的体积，直接利用求旋转体的体积公式求定积分即可.(Ⅱ)求变力所做的功，利用微元法求解.

**【解】**(Ⅰ)由对称性，所求的容积为

$$\begin{aligned}V&=2\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}x^2\mathrm{d}y\\&=2\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(1-y^2)\mathrm{d}y=\frac{9\pi}{4}.\end{aligned}$$

即该容器的容积为 $\frac{9\pi}{4}$ $\mathrm{m}^3$.

（Ⅱ）所求的功为

$$W = 10^3\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\pi(1-y^2)(2-y)g\mathrm{d}y + 10^3\int_{\frac{1}{2}}^{2}\pi[1-(y-1)^2](2-y)g\mathrm{d}y$$

$$= 10^3\pi g\left[\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2-y-2y^2+y^3)\mathrm{d}y + \int_{\frac{1}{2}}^{2}(4y-4y^2)+y^3)\mathrm{d}y\right]$$

$$= \frac{27\times10^3}{8}\pi g.$$

即所求的功为$\frac{27\times10^3}{8}\pi g$ 焦耳.

**【评注】**本题考查曲线绕坐标轴旋转所成旋转体的体积，属于基础知识点．变力做功问题也是常考知识点，需重点掌握．有关这两个知识点的详细介绍和完全类似题型可参见《考研数学复习指南》(理工类，2012 版)P195 题型七，P198 题型十.

(21)**【分析】**本题为抽象函数的二重积分的求解，而且被积函数包括抽象函数的偏导数，可用分部积分法求解．注意，因为函数 $f(1,y)$ 和 $f(x,1)$ 分别是关于 $y$ 和 $x$ 的常值函数，所以 $f'_y(1,y)=0$，$f'_x(x,1)=0$. 以上这两点是解决本题的关键.

**【解】**因为 $f(1,y)=0$，$f(x,1)=0$，所以 $f'_y(1,y)=0$，$f'_x(x,1)=0$.

从而

$$I=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 x\left[yf'_x(x,y)\Big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 f'_x(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xf'_x(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1\left[xf(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=a.$$

**【评注】**本题考查了二重积分计算，但本题是对抽象函数进行积分计算，不属于基础题型，但所涉及的知识点都是基本知识点．分析此题我们发现，题目的条件中包括了 $f(1,y)$ 和 $f(x,1)$ 的函数值，和在整个区域 $D$ 上函数 $f(x,y)$ 的二重积分值，这些信息提示我们使用分部积分法把所要求的二重积分转化为对 $f(x,y)$ 的二重积分的计算．这种解题技巧需重点掌握.

(22)**【分析】**(Ⅰ) 由题目条件知道，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示，而它们都是三维向量，由任意 $n+1$ 和 $n+1$ 个以上的 $n$ 维向量组必线性相关知，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_i$ 必线性相关，对 $i=1,2,3$.（Ⅱ）利用矩阵初等变换的基础知识求解.

**【解】**(Ⅰ)4 个 3 维向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\alpha}_i$ 线性相关($i=1,2,3$)，若 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示($i=1,2,3$)，与题设矛盾．于是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关，.

从而

$$|\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=a-5=0.$$

于是　$a=5$. 此时，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表示.

（Ⅱ）令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \vdots \beta_1,\beta_2,\beta_3)$. 对 $A$ 施以初等行变换

$$A=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right).$$

从而

$$\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3,\quad \beta_2=\alpha_1+2\alpha_2,\quad \beta_3=5\alpha_1+10\alpha_2-2\alpha_3.$$

**【评注】**本题（Ⅰ）考查已知向量组线性相关性反求其中参数，属常考知识点．本题（Ⅱ）考查将某一向量组用另一向量组线性表示的知识，属于基本题型，需熟练重点掌握．

(23)**【分析】**（Ⅰ）利用所给信息求矩阵的特征值和特征向量．注意，由于三阶实对称矩阵 $A$ 的秩为2，所以 $A$ 必有一个特征值为0．（Ⅱ）在（Ⅰ）中已经求出了矩阵 $A$ 的特征值和特征向量，直接利用此计算即可．

**【解】**（Ⅰ）由于 $A$ 的秩为2，故0是 $A$ 的一个特征值．由题设可得

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以，$-1$ 是 $A$ 的一个特征值，且属于 $-1$ 的特征向量为 $k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$k_1$ 为任意非零常数；

1也是 $A$ 的一个特征值，且属于1的特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$k_2$ 为任意非零常数．

设 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 是 $A$ 的属于0的特征向量，由于 $A$ 为实对称矩阵，则

$$(1,0,-1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,\quad (1,0,1)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0,$$

即

$$\begin{cases}x_1-x_3=0,\\x_1+x_3=0,\end{cases}$$

于是属于0的特征向量为 $k_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$k_3$ 为任意非零常数．

（Ⅱ）令 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，

于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

**【评注】**本题考查求解矩阵的特征值和特征向量的知识，实对称矩阵必可对角化，对角化的矩阵的对角线元素即为矩阵的特征值，而变换所用矩阵则由特征值对应的特征向量组成．本题所涉及知识点都是常考知识点，本题属于基本题型．